

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов

**ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО І СИЛОВОГО АНАЛІЗУ МАТЕРІАЛЬ-
НИХ ТІЛ**

Конспект лекцій з прикладної механіки
для студентів немашинобудівних спеціальностей

ЧАСТИНА I

Харків 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов

**ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО І СИЛОВОГО АНАЛІЗУ МАТЕРІАЛЬ-
НИХ ТІЛ**

Конспект лекцій з прикладної механіки
для студентів немашинобудівних спеціальностей

ЧАСТИНА I

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1
від 04.06.2014 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

УДК 621.01
ББК 34.41
М75

Рецензенти: *В.Ф. Далека*, д-р техн. наук, проф., ХНУГХ;
В.Л. Хавін, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХП».

Музикін Ю.Д.

М75 Основи кінематичного і силового аналізу матеріальних тіл : конспект лекцій з прикладної механіки для студентів немашинобудівних спеціальностей. Ч. I / Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов. – Х .: НТУ «ХП», 2014. – 51 с.

Текст лекцій містить основні розділи теоретичної частини курсу «Прикладна механіка», які представлені в стислій конспективній формі. В першій частині висвітлюються питання з таких розділів: кінематика матеріальних тіл, силовий аналіз матеріальних тіл. У кожному розділі наведені приклади задач та методики їх розв'язання, побудовані на базі розглянутого теоретичного матеріалу.

Призначено для студентів немашинобудівних спеціальностей.

Іл.: 51

УДК 621.01

ББК 34.41

© НТУ «ХП», 2014

© Музикін Ю.Д., Клітної В.В., Наумов О.І., 2014

Вступ

Конспект лекцій з курсу "Прикладна механіка" – це короткий виклад питань науки «Машинознавство», в якому виділяються основні теоретичні положення.

Це видання – початковий ступінь при засвоєнні теоретичної частини навчальної дисципліни "Прикладна механіка", де основна увага приділяється питанням кінематики і динаміки матеріальної системи тіл, формуванню знань про особливості розрахунків конструкцій на міцність, розвитку навичок інженерного проектування деталей загального призначення. На додаток до конспекту необхідно використовувати підручники, навчальні посібники і довідники, які будуть рекомендовані викладачем.

Конспект лекцій розрахований на програму з 32 лекційних годин для студентів денної і заочної форм навчання немашинобудівних спеціальностей.

При складанні конспекту лекцій автори спиралися на методики, прийняті на кафедрі "Деталі машин і прикладна механіка" Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".

Курс "Прикладна механіка" – синтетичний курс, який включає основні розділи з таких дисциплін:

- Теоретична механіка;
- Теорія механізмів і машин;
- Опір матеріалів;
- Деталі машин;
- Взаємозамінюваність, допуски і посадки.

Освоєння курсу базується на знаннях основних законів фізики, вищої математики, нарисної геометрії, інженерної і комп'ютерної графіки. Передбачається володіння логічним мисленням, знаннями теорії розмірності фізичних характеристик.

Курс "Прикладна механіка" є одним із найстаріших курсів загальноінженерної підготовки в технічних вищих навчальних закладах. Він завершує цикл загальноінженерних дисциплін і є єдиним між загальнотехнічними і спеціальними дисциплінами.

Умовно курс "Прикладна механіка" може бути поданий у вигляді трьох основних розділів:

- Основи кінематичного і силового аналізу матеріальних тіл;
- Основи розрахунків на міцність;

- Основи інженерного проектування.

У першій частині конспекту розглядаються: кінематика матеріальних тіл; кінетика матеріальних тіл; структура механізмів; методи кінематичного дослідження механізмів (без урахування сил, які діють на ланки механізмів); кінетостатичний аналіз механізмів.

Як приклад розглядається кривошипно-повзунний механізм. Цей механізм широко використовується у різних машинах: двигунах внутрішнього згоряння, поршневих компресорах і насосах, верстатах, кувальних машинах і пресах. Для кожного варіанта функціонального призначення при проектуванні необхідно враховувати специфічні вимоги до механізму. Однак математичні викладки, які описують структуру, геометрію, кінематику і динаміку механізму залишаються практично однаковими.

Лекція 1. Структурний аналіз механізму. Основні поняття і визначення

1. Ланка, кінематична пара і їх класифікація.
2. Кінематичний ланцюг і його структура. Міра рухливості ланки. Механізм.
3. Схеми плоских механізмів.
4. Структурний аналіз плоских механізмів.

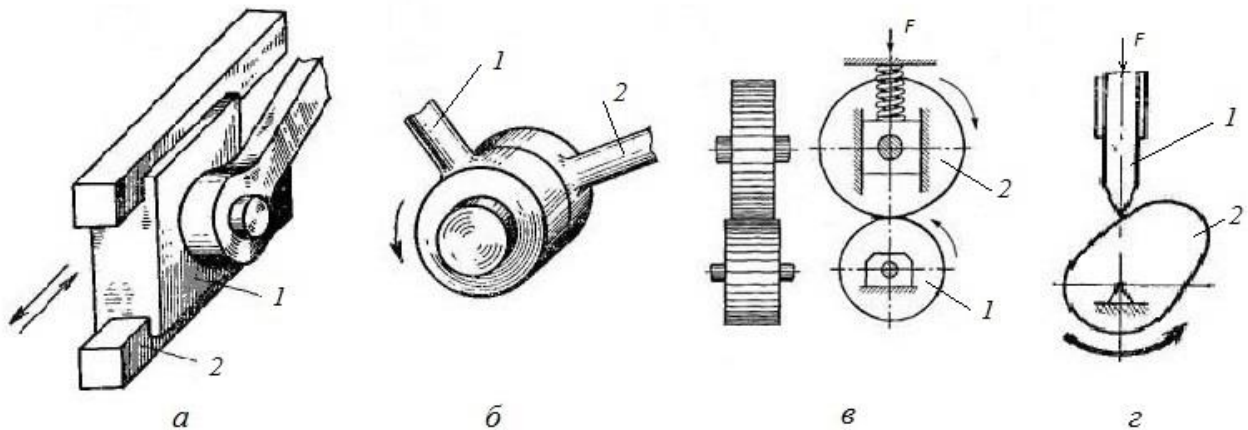
1.1. Ланка, кінематична пара і їх класифікація

Будь-яка машина складається з рухливих елементів. Прості рухливі елементи машини називаються ланками. Ланка може включати одну або декілька деталей.

Місце сполучення двох рухливих ланок називається кінематичною парою.

Безпосередня зона контакту ланок називається елементом кінематичної пари, яким може виступати поверхня, лінія або точка.

Кінематичні пари, які сполучаються по поверхні, називаються нижчими кінематичними парами (рис. 1.1, а, б), а ті, що сполучаються по лінії (рис. 1.1, в) або точці (рис. 1.1, г) – вищими.



повзун-напрямна

циліндричний шарнір

зубчасте зачеплення

штовхач-кулачок

Рисунок 1.1 – Приклади нижчих і вищих кінематичних пар

Нижчі кінематичні пари передають великі навантаження. Вищі – мають високий ККД. Замикання в кінематичних парах може бути геометричне (рис. 1.1, а, б), обумовлене конфігурацією ланок, або силове (рис. 1.1, в, г) під дією прикладеної сили.

1.2. Кінематичний ланцюг і його структура. Міра рухливості ланки. Механізм

Сукупність ланок і кінематичних пар утворює кінематичний ланцюг, який, залежно від будови, може бути замкнутим або розімкненим, простим або складним.

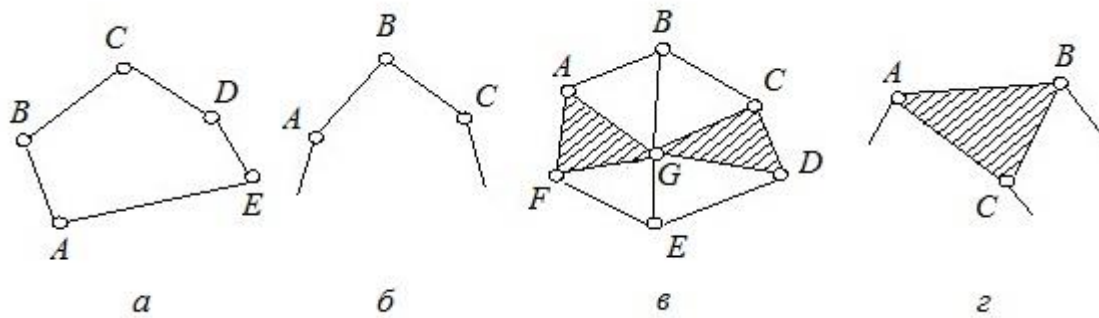


Рисунок 1.2 – Схематичне подання кінематичних ланцюгів

У замкнутому кінематичному ланцюзі (рис. 1.2, а, в) кожна ланка входить щонайменше в дві кінематичні пари, а в розімкненому ланцюзі (рис. 1.2, б, з) є ланки, що входять лише в одну кінематичну пару.

Простим (рис. 1.2, а, б) називають кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить у з'єднання з іншими ланками за допомогою однієї або двох кінематичних пар. Якщо кінематичних пар, утворених однією ланкою, більше двох – кінематичний ланцюг називають складним (рис. 1.2, в, з).

Кінематичні ланцюги бувають плоскими або просторовими. У плоских кінематичних ланцюгах усі ланки лежать і рухаються в одній або у паралельних площинах. У просторових ланцюгах – у пересічних площинах.

Кожна ланка в просторі має шість ступенів свободи (рис. 1.3, а).

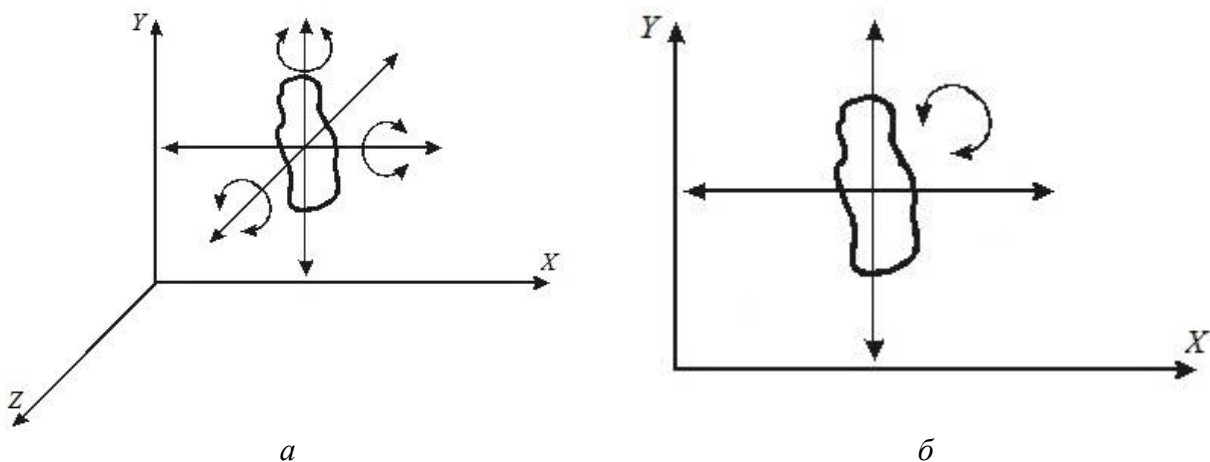


Рисунок 1.3 – Ступені свободи ланки

На площині ланка має три ступені свободи (рис. 1.3, б).

Кінематичні пари обмежують рухливість ланок. Ці обмеження називаються зв'язками. У просторі кінематична пара не може накладати більше 5-ти обмежень, оскільки інакше ланки стануть нерухомими одна відносно одної і виродяться в одну ланку. На площині кількість зв'язків не може перевищувати 2-х.

Кількість зв'язків, що накладаються кінематичною парою, визначає клас кінематичної пари :

- 5 клас – 1-рухливі пари (зворотно-поступальна (див. рис. 1.1, а), оберտальна (див. рис. 1.1, б));

- 4 клас – 2-рухливі (обертальна (див. рис. 1.1, в), зворотно-поступальна (див. рис. 1.1, з));
- 3 клас – 3-рухливі (площина лежить на площині);
- 2 клас – 4-рухливі (циліндр лежить на площині);
- 1 клас – 5-рухливі (куля – на площині).

Кінематичний ланцюг, одна з ланок якого нерухома, називається механізмом. Нерухома ланка називається стояком.

Механізм, призначений для здійснення корисної роботи або перетворення енергії, називається машиною.



Рисунок 1.4 – Структурна схема машини

Структурно машина включає такі елементи (рис. 1.4.):

- машина-двигун (МД) – джерело енергії;
- робоча машина (РМ) забезпечує виконання технологічної операції;
- передавальний механізм (ПМ) забезпечує синхронізацію параметрів МД і РМ;
- система управління (СУ) дозволяє варіювати режими роботи комплексу (машини).

Кожна конкретна машина може мати відхилення від указаної схеми.

1.3. Схеми плоских механізмів

На рисунках 1.5–1.8 подані схеми найбільш поширених типів плоских механізмів

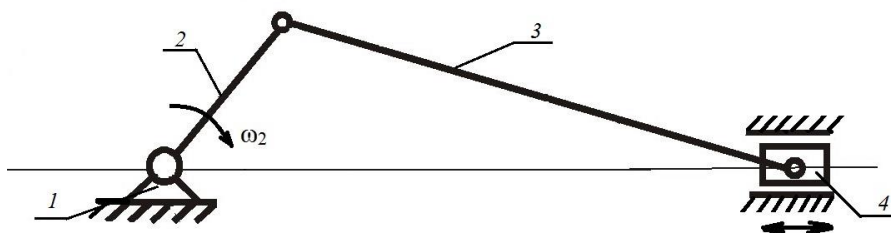


Рисунок 1.5 – Кривошипно-повзунний механізм: 1 – стояк; 2 – кривошип; 3 – шатун; 4 – повзун.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на зворотно-поступальний рух повзуна 4.

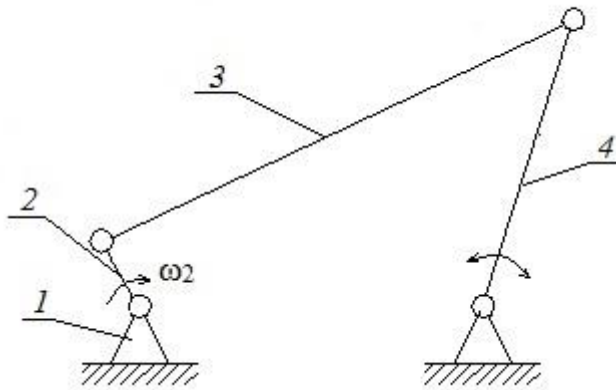


Рисунок 1.6 – Кривошипно-балансирний механізм: 1 – стояк; 2 – кривошип; 3 – шатун; 4 – балансир.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на рух хитного балансира 4.

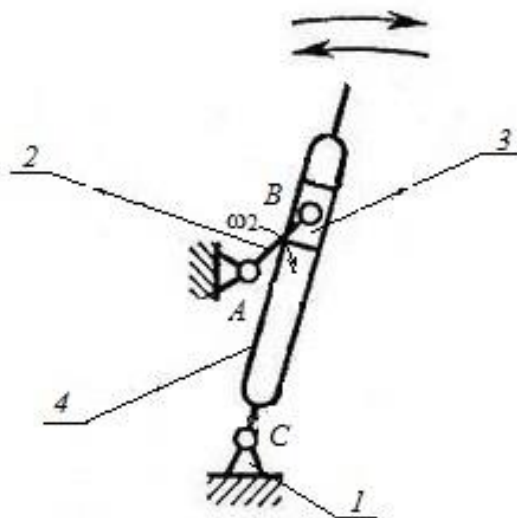


Рисунок 1.7 – Кривошипно-кулісний механізм: 1 – стояк; 2 – кривошип; 3 – кулісний камінь; 4 – куліса.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на хитний рух куліси 4 при $AB < AC$ і на обертальний рух куліси 4 при $AB > AC$.

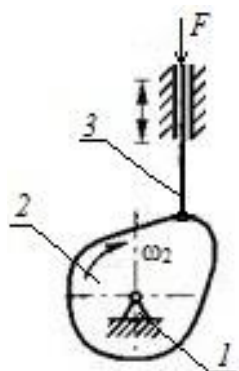


Рисунок 1.8 – Кулачковий механізм: 1 – стояк; 2 – кулачок; 3 – штовхач.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кулачка 2 на зовотно-поступальний рух штовхача 3.

1.4. Структурний аналіз плоских механізмів

Мета структурного аналізу:

- Визначити, чи є сукупність ланок і кінематичних пар механізмом;

- З'ясувати міру рухливості механізму.

Міра рухливості механізму – кількість незалежних координат, які мають бути задані, щоб положення механізму було визначене однозначно.

Нехай механізм має n -ланок, тоді кількість рухливих ланок буде дорівнювати $n-1$. Кожна ланка на площині має 3 ступені свободи, а всі рухливі ланки матимуть $3(n-1)$ – ступенів свободи. Кожна кінематична пара накладає зв'язки (обмежує ступені свободи ланок). Для плоскої задачі кінематична пара 5-го класу накладає два зв'язки; 4-го класу накладає один зв'язок. Тоді міра рухливості механізму :

$$W = 3(n-1) - 2P_H - P_B. \quad (1.1)$$

Вираз (1.1) – формула П. Л. Чебишева для плоского механізму.

Аналогічно можна визначити міру рухливості для просторового механізму:

$$W = 6(n-1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - 1P_1, \quad (1.2)$$

де P_5, P_4, P_3, P_2, P_1 – кількість кінематичних пар відповідного класу; 5, 4, 3, 2, 1 – кількість зв'язків, що накладаються кінематичними парами.

Визначимо міру рухливості розглянутих плоских механізмів.

Рис 1.5:	$n=4$;	$P_H=4$;	$P_B=0$;	$W=3(4-1)-2\cdot 4=1$.
Рис 1.6:	$n=4$;	$P_H=4$;	$P_B=0$;	$W=3(4-1)-2\cdot 4=1$.
Рис 1.7:	$n=4$;	$P_H=4$;	$P_B=0$;	$W=3(4-1)-2\cdot 4=1$.
Рис 1.8:	$n=3$;	$P_H=2$;	$P_B=1$;	$W=3(3-1)-2\cdot 2-1\cdot 1=1$.

Наведені механізми мають міру рухливості, що дорівнює одиниці, тобто достатньо задати положення ланки 2, щоб визначити положення всіх інших ланок.

Якщо міра рухливості механізму $W=0$ (рис. 1.9, а), то такий кінематичний ланцюг називається фермою. Якщо міра рухливості $W=2$ (рис. 1.9, б), то необхідно задати рух двом ланкам механізму, щоб положення інших ланок механізму було визначене однозначно.



Рисунок 1.9 – Міра рухливості $W \neq 1$

Рис 1.9, а: $n = 3$; $P_H = 3$; $P_B = 0$; $W = 3(3 - 1) - 2 \cdot 3 = 0$.

Рис 1.9, б: $n = 5$; $P_H = 5$; $P_B = 0$; $W = 3(5 - 1) - 2 \cdot 5 = 2$.

Ланка, яка може бути викинута з механізму без порушення його роботи, називається зайвою ланкою.

Контрольні запитання

1. Що таке ланка?
2. Кінематичні пари і їх класифікація.
3. Кінематичні ланцюги.
4. Міра рухливості ланки.
5. Механізм. Структурна схема машини.
6. Схеми плоских механізмів.
7. Структурний аналіз плоских механізмів.
8. Формула Чебишева.

Лекція 2. Кінематика

1. Загальні поняття і визначення.
2. Кінематика матеріальної точки.
3. Кінематика абсолютно твердого тіла.
4. Кінематичне дослідження плоских механізмів.

2.1. Загальні поняття і визначення

Кінематика – розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл незалежно від причин, що викликають цей рух, і маси самих тіл.

При кінематичному дослідженні мають бути визначені:

- закони руху тіла;
- швидкість руху тіла;
- прискорення руху тіла.

При вивченні законів механічного руху використовуються дві моделі реальних тіл: матеріальна точка і абсолютно тверде тіло.

- Матеріальна точка – геометрична точка, що має масу, але не має розміру;
- абсолютно тверде тіло – тіло, відстань між двома точками якого залишається постійною (тіло, що не деформується).

2.2. Кінематика матеріальної точки

Рух матеріальної точки може бути поданий трьома способами:

- векторним;
- координатним;
- природним.

При векторному способі задання руху, положення матеріальної точки визначається її радіус-вектором $\vec{r}(t)$, проведеним із початкової точки O (рис. 2.1). Їх кінці описують криву, яка називається годографом радіус-вектора, і яка відповідає траєкторії руху точки.

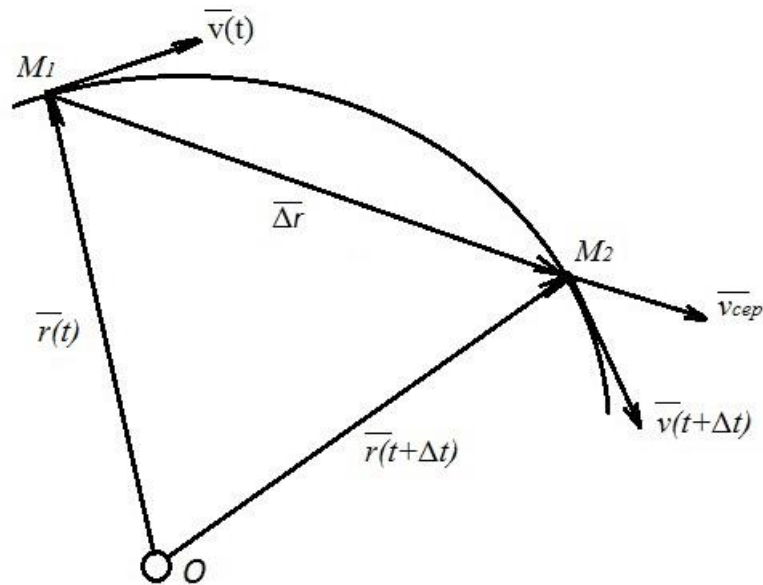


Рисунок 2.1 – Векторний спосіб задання руху

Вираз $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. Функцію $\vec{r}(t)$ вважають однозначною, безперервною і такою, що двічі диференціюється за часом.

Нехай точка знаходилася у положенні M_1 у момент часу t і M_2 для часу $t + \Delta t$ (рис. 2.1), тоді $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Відношення зміни радіус-вектора $\Delta \vec{r}$ до проміжку часу Δt називається середньою швидкістю $\vec{V}_{\text{сеп}}$.

$$\vec{V}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Ліміт цього відношення, коли $\Delta t \rightarrow 0$, називається миттєвою швидкістю матеріальної точки:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.2)$$

Таким чином, швидкість матеріальної точки може бути визначена як перша похідна радіус-вектора за часом. Вектор швидкості спрямований по дотичній до траєкторії руху цієї матеріальної точки. Одиниця виміру швидкості – м/с.

Відношення зміни швидкості $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$ до приросту часу Δt називається середнім прискоренням

$$\overrightarrow{a}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Спрямовуючи до нуля проміжок часу, на якому обчислюється прискорення, отримаємо значення миттєвого прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{a}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.4)$$

Таким чином, прискорення матеріальної точки – векторна фізична величина, що дорівнює другій похідній від радіус-вектора за часом і відповідно першій похідній від миттєвої швидкості за часом. Характеризує швидкість зміни швидкості. Одиниця виміру прискорення – м/с^2 .

При координатному способі положення матеріальної точки задається її координатами. У нерухомій декартовій системі координат (рис. 2.2) рівняння руху матеріальної точки можуть бути наведені у такому вигляді:

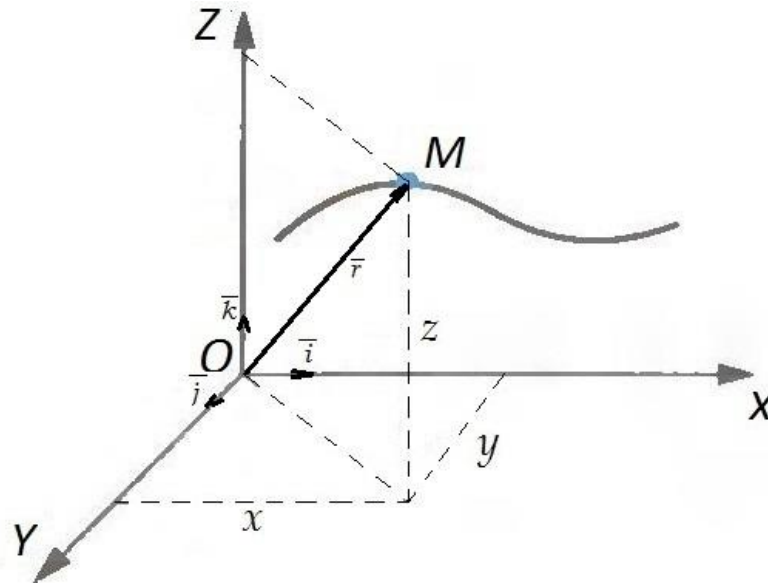


Рисунок 2.2 – Координатний спосіб задання руху

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Як і функцію $\vec{r}(t)$, функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вважають однозначними, безперервними і такими, що мають дві безперервні похідні за часом.

Зв'язок між радіус-вектором $\vec{r}(t)$ і декартовими координатами точки виражається рівністю

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (2.6)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти (одичні вектори) осей координат.

За аналогією до векторного способу швидкість має вираз

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \quad (2.7)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції швидкості \vec{V} на осі OX, OY, OZ .

Величина швидкості визначається рівнянням

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (2.8)$$

а її напрямок задається по напрямних косинусах

$$\cos(x^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_x}{V}; \quad \cos(y^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_y}{V}; \quad \cos(z^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_z}{V}. \quad (2.9)$$

Аналогічно для прискорення отримуємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}) = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (2.10)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції прискорення \vec{a} на осі OX, OY, OZ .

Величина і напрямок прискорення визначаються рівняннями:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (2.11)$$

$$\cos(x^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(y^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(z^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.12)$$

При природному способі задання руху матеріальної точки повинно бути відомо (рис. 2.3) :

- траєкторію руху;
- початкове положення на траєкторії (точка O);
- напрямок руху по траєкторії (+ ; -);
- закон руху по траєкторії $S = S(t)$ – закон руху матеріальної точки у природній формі. При цьому $S(t)$ – функція, що двічі безперервно диференціюється.

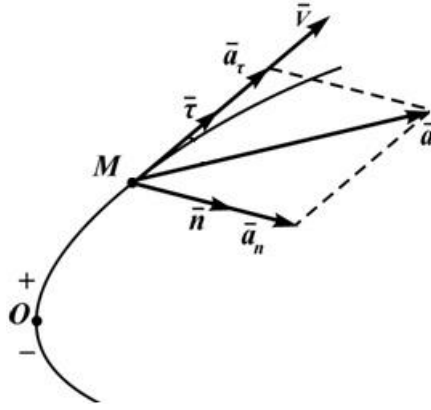


Рисунок 2.3 – Природний спосіб задання руху

Визначимо швидкість і прискорення точки M при природному способі задання руху. Введемо у точці M одиничний вектор $\vec{\tau}$, спрямований по дотичній до траєкторії, і одиничний вектор \vec{n} , спрямований по нормалі до траєкторії до центра кривизни. За аналогією до векторного способу

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}(S(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot V_\tau, \quad (2.13)$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta S} = 1; \quad \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}; \quad \frac{dS}{dt} = V_\tau,$$

де V_τ – проекція вектора швидкості на дотичну вісь. Величина V_τ додатна, якщо точка рухається у бік збільшення дугової координати і від’ємна, якщо інакше. Згідно з (2.13) швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії.

Прискорення у точці M :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot V_\tau) = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot V_\tau + \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau},$$

де $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$ – може бути отриманий із геометричних співвідношень лінійних і кутових параметрів; ρ – радіус кривизни траєкторії у цій точці. Підставляючи отримані величини у початкову рівність, отримаємо

$$\vec{a} = \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} + \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (2.14)$$

де $\vec{a}_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n}$ – нормальне прискорення, що характеризує зміну швидкості за напрямком і спрямоване до центра кривизни; $\vec{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau}$ – дотичне (тангенціальне)

прискорення, що характеризує зміну швидкості за величиною і спрямоване по дотичній до траєкторії руху.

З (2.14) випливає, що повне прискорення у природній формі може бути подано як векторна сума нормального і тангенціального прискорень – $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ і завжди лежить у дотичній площині (див. рис. 2.3).

Якщо $\vec{a}_n = 0$ – рух точки прямолінійний ($\rho \rightarrow \infty$); $\vec{a}_\tau = 0$ – швидкість руху по траєкторії постійна; $\vec{a}_\tau > 0$ – швидкість і прискорення спрямовані в один бік (прискорений рух); $\vec{a}_\tau < 0$ – швидкість і прискорення спрямовані у різні боки (уповільнений рух) (див. рис. 2.4).

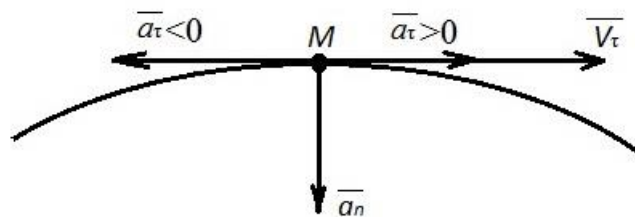


Рисунок 2.4 – Прискорений і уповільнений рух

2.3. Кінематика абсолютно твердого тіла

Найбільш поширеними видами руху абсолютно твердого тіла є:

- поступальний рух;
- обертальний рух;
- складний рух.

Поступальним рухом називається такий рух, при якому будь-яка пряма, проведена на тілі, у процесі руху цього тіла залишається паралельною сама собі (рис. 2.5).

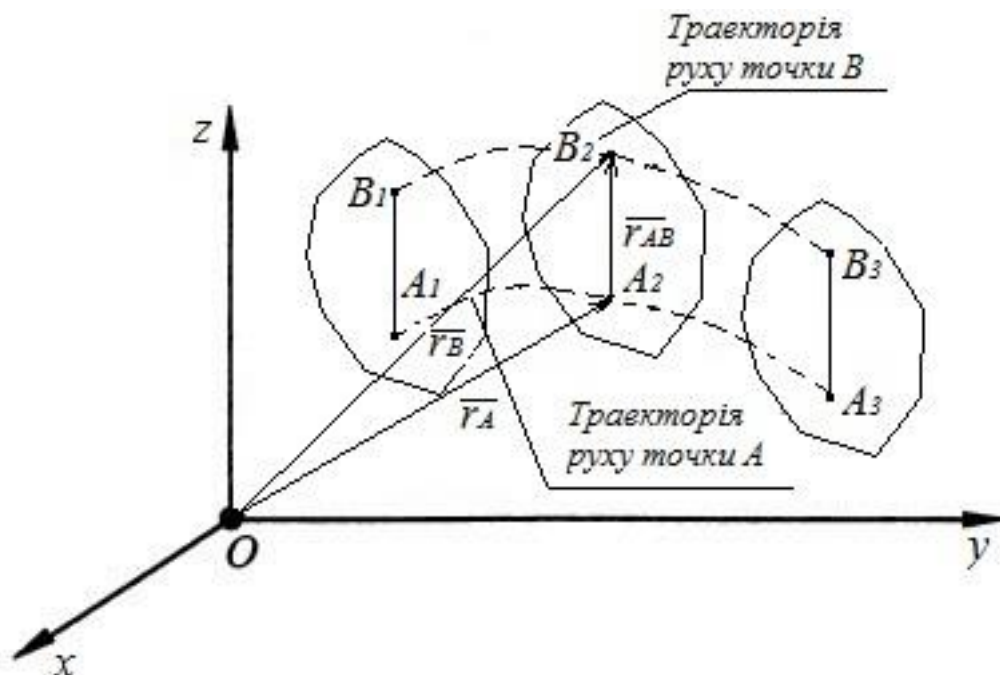


Рисунок 2.5 – Поступальний рух

Відрізок $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$; $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Траєкторія руху точки A дорівнює і паралельна траєкторії руху точки B . Виходячи з визначення, закон руху твердого тіла може бути заданий у векторному вигляді:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.15)$$

Для швидкості і прискорення довільної точки отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + 0 & \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A; \\ \frac{d\vec{V}_B}{dt} &= \frac{d\vec{V}_A}{dt} & \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A. \end{aligned} \quad (2.16)$$

З отриманих виразів випливає, що при поступальному русі твердого тіла кінематика його руху дорівнює кінематиці руху будь-якої точки цього тіла.

При поступальному русі траєкторії руху точок тіла можуть бути довільними.

Обертальний рух – рух, при якому одна пряма тіла залишається нерухомою (називається віссю обертання), а всі інші точки тіла рухаються по колах, що лежать в площинах, перпендикулярних до осі обертання (рис. 2.6).

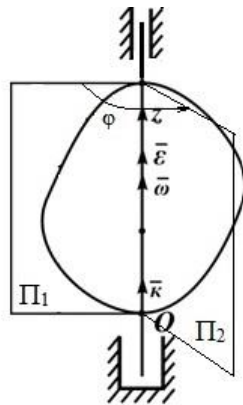


Рисунок 2.6 – Обертальний рух

Двогранний кут φ , утворений нерухомою площиною Π_1 і площиною Π_2 , жорстко пов'язаною з тілом, повністю визначає положення обертання тіла. Зміна цього кута з часом і є закон обертального руху:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.17)$$

Додатним вважається кут, що відкладається проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися назустріч вибраному напрямку осі обертання. Кут вимірюється у радіанах.

Швидкість зміни кута φ – це кутова швидкість. Приймавши \vec{k} як одиничний орт додатного напрямку осі, отримаємо:

$$\vec{\omega} = \vec{k} \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.18)$$

Вектор кутової швидкості завжди спрямований уздовж осі. При додатному значенні кутової швидкості напрямки $\vec{\omega}$ і \vec{k} співпадають, при від'ємному – протилежні.

Зміна кутової швидкості характеризується кутовим прискоренням:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.19)$$

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ так само спрямований по осі обертання. При прискореному обертанні напрямки $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ співпадають, при уповільненому – протилежні.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі кожна точка тіла рухається по колу. Радіус кола ρ дорівнює відстані від точки до осі обертання (рис. 2.7).

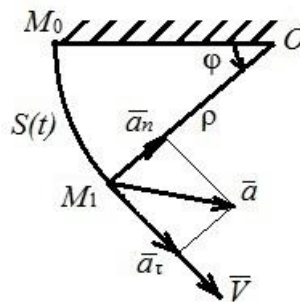


Рисунок 2.7 – Рух точки тіла, що обертається

Оскільки траєкторія руху точки відома – коло; початок відліку (точка M_0) і додатний напрямок руху вибрані, довжина дуги (дугова координата) визначається за формулою:

$$S(t) = \cup M_0 M_1 = \varphi \cdot \rho. \quad (2.20)$$

Таким чином, закон руху точки може бути заданий природним способом.

Лінійна швидкість точки :

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot \frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{\tau} \cdot \rho \cdot \omega. \quad (2.21)$$

Прискорення при природному способі задання руху визначається як сума дотичного і нормального прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \quad (2.22)$$

$$\vec{a}_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} = \rho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\tau} = \rho \cdot \varepsilon \cdot \vec{\tau}.$$

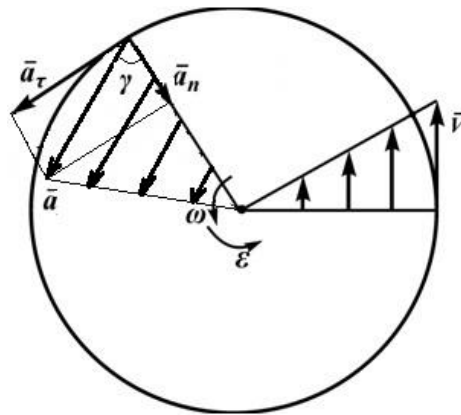


Рисунок 2.8 – Розподіл швидкостей і прискорень у перерізі тіла, що обертається

На рис. 2.8 вказано напрямки векторів швидкості і прискорень. Кут, що становить вектор повного прискорення з радіусом, може бути визначений із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\rho \cdot \varepsilon}{\omega^2 \cdot \rho} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (2.23)$$

З рис. 2.8 випливає, що закони розподілу швидкостей і прискорень точок у тілі, що обертається, залежно від відстані їх до осі обертання відповідають формулам:

$$V = \rho \cdot \omega; \quad a = \rho \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (2.24)$$

Складним називається такий рух, при якому рух розглядається у двох системах координат (нерухомій і рухливій системах) (рис. 2.9).

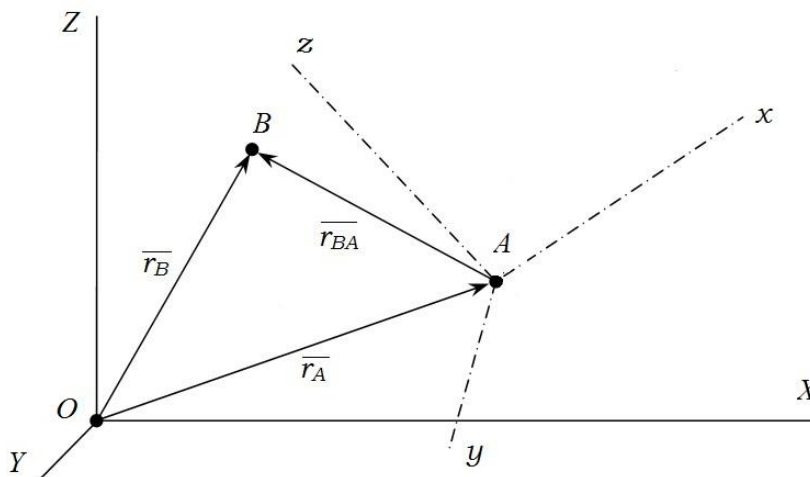


Рисунок 2.9 – Складний рух

Розглянемо точку B , що рухається по відношенню до рухливої системи відліку $Axyz$, яка, у свою чергу, рухається відносно іншої системи відліку $OXYZ$, яку називаємо основною або нерухомою (рис. 2.9). Введемо такі визначення.

Рух, що здійснюється точкою B по відношенню до рухливої системи відліку $Axyz$, називається відносним рухом. Швидкість точки B по відношенню до осей $Axyz$ називається відносною швидкістю \vec{V}_{BA} , а прискорення – відносним прискоренням \vec{a}_{BA} . З визначення випливає, що при обчисленні \vec{V}_{BA} і \vec{a}_{BA} можна рух осей $Axyz$ не враховувати (розглядати їх як нерухомі).

Рух, що здійснюється рухливою системою відліку $Axyz$ (і усіма незмінно пов'язаними з нею точками простору) по відношенню до нерухомої системи $OXYZ$, є для точки B переносним рухом. Переносною швидкістю \vec{V}_A і переносним прискоренням \vec{a}_A називаються швидкість і прискорення відносно нерухомої системи відліку тієї точки, незмінно пов'язаної з рухливою системою відліку $Axyz$, з якою співпадає в цей момент точка B .

Рух, що здійснюється точкою B по відношенню до нерухомої системи відліку $OXYZ$, називається абсолютним або складним. Швидкість цієї точки називається абсолютною швидкістю \vec{V}_B і прискорення – абсолютним прискоренням \vec{a}_B .

Основне завдання вивчення складного руху точки полягає у встановленні залежності між швидкостями і прискореннями відносного, переносного і абсолютного руху точки.

Закон руху точки B можемо записати у такому вигляді:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}. \quad (2.25)$$

Для швидкості і прискорення довільної точки отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} & \Rightarrow \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \\ \frac{d\vec{V}_B}{dt} &= \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} & \Rightarrow \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Якщо переносний рух є поступальним, а відносний – обертальним, то справедливою є така рівність:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Якщо переносний рух обертальний, то додатково виникає коріолісове прискорення \vec{a}_K (характеризує зміну відносної швидкості у переносному русі і переносної швидкості у відносному), тоді

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_K, \quad (2.27)$$

де

$$\vec{a}_K = 2 \cdot (\vec{V}_{BA} \times \vec{\omega}),$$

де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості переносного обертання.

Для визначення напрямку коріолісового прискорення необхідно вектор відносної швидкості \vec{V}_{BA} повернути на 90° у напрямку переносної кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Таким чином, швидкість будь-якої точки тіла при складному плоскому русі складається зі швидкостей її поступального і обертального рухів, і для визначення положення тіла необхідно здійснити поступальну ходу цього тіла, що відповідає будь-якій його точці, і обертальний рух навколо цієї ж точки (рис. 2.10, а).

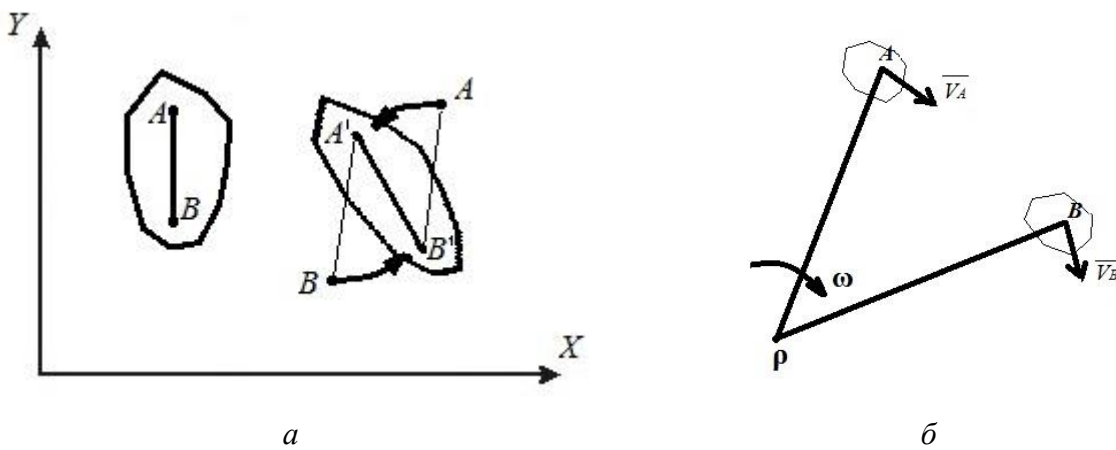


Рисунок 2.10 – Способи отримання складного руху

Складний рух можна подати як один обертальний рух із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо деякої нерухомої точки « ρ », яка називається миттєвим центром швидкостей (рис. 2.10, б). З кінематичних характеристик для точок A і B можна отримати положення миттєвого центра швидкостей :

$$V_A = \omega \cdot |\rho A|; \quad V_B = \omega \cdot |\rho B|; \quad \frac{V_A}{|\rho A|} = \frac{V_B}{|\rho B|}.$$

2.4. Кінематичне дослідження плоских механізмів

Кінематичний аналіз – це дослідження руху ланок механізму без урахування сил, що викликають цей рух. Завданнями кінематичного дослідження є:

- визначення положень усіх ланок, які вони займають при роботі механізму, а також побудова траєкторій руху окремих точок механізму;
- визначення лінійних швидкостей характерних точок механізму і визначення кутових швидкостей його ланок;
- визначення лінійних прискорень окремих точок механізму і кутових прискорень його ланок.

При кінематичному аналізі має бути задано структурну схему механізму, вибрано початкову ланку, за яку приймається вхідна ланка, і заданий закон його руху.

Кінематичне дослідження плоских механізмів виконується двома способами.

Аналітичний спосіб. При цьому способі ланки механізму, його характерні розміри і переміщення ланок подають у вигляді векторів, на підставі яких складаються векторні рівняння, розв'язуючи які, виводять рівняння для визначення переміщень (лінійних або кутових) досліджуваних ланок і, диференціюючи їх, визначають швидкості і прискорення.

Графо-аналітичний спосіб. Реалізується двома методами – побудовою діаграм переміщень, швидкостей і прискорень із використанням графічного диференціювання й інтеграції або побудовою планів положення, швидкостей і прискорень.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому швидкості (прискорення) різних точок зображені у вигляді векторів, що показують напрямки і величини (у масштабі) цих швидкостей (прискорень) в даний момент часу.

Аналітичний метод високоточний, але трудомісткий і не наочний. Графо-аналітичний спосіб має похибку обчислень 5–7 %, що пов'язано з необхідністю графічних побудов, але досить простий в реалізації і наочний.

Розглянемо графічне розв'язання задачі на прикладі кінематичного аналізу кривошипно-повзунного механізму (див. рис. 1.5), довжини ланок якого – кривошипа і шатуна – L_{OA} і L_{AB} , а кутова швидкість кривошипа ω_2 – постійна.

Для визначення положень усіх ланок, які вони займають при роботі механізму, побудуємо план положень. Для цього виберемо масштабний коефіцієнт довжин μ_l . Масштабний коефіцієнт μ – це величина, яка дорівнює відношенню якої-небудь величини у системі СІ до відрізка, що означає цю величину на кресленні

$$\mu_l = \frac{2 \cdot L_{OA} + L_{AB}}{l} = - \frac{м}{мм}.$$

Визначимо довжини відрізків, що зображують на кресленні ланки механізму:

$$l_{OA} = \frac{L_{OA}}{\mu_l}; \quad l_{AB} = \frac{L_{AB}}{\mu_l}.$$

Побудову розпочинаємо з викреслювання траєкторій точки A , що здійснює обертальний рух, і точки B (пряма лінія), що здійснює прямолінійний рух (рис. 2.11).

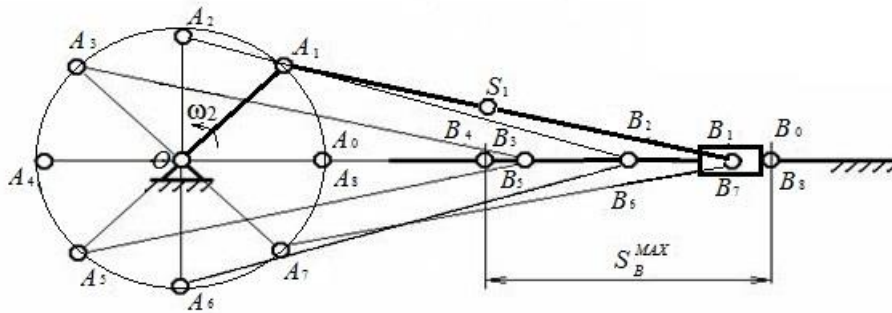


Рисунок 2.11 – План положень кривошипно-повзунного механізму

Ділимо траєкторію точки A на рівну кількість частин (вісім або дванадцять). Далі проставимо нумерацію положення точок A_0, A_1, \dots, A_8 по напрямку обертання кривошипа. Положення точки A_8 співпадає з положенням A_0 . З'єднаємо точки $A_0 \dots A_8$ з центром обертання кривошипа точкою O . Далі користуючись методом зарубок на траєкторії точки B отримаємо точки $B_0 \dots B_8$. З'єднавши однойменні точки A і B у відповідних положеннях, отримаємо вісім положень шатуна. Розрахункове положення механізму виділимо жирною лінією. Відмітимо на основному положенні механізму центри тяжіння ланок. Вважаємо, що центр тяжіння кривошипа співпадає з точкою O (за рахунок противаги), повзуна з точкою B , шатуна з точкою S , розташованою на середині AB .

Побудуємо діаграму переміщень точки B (рис. 2.12). По осі абсцис відкладемо відрізок, що зображує період одного оберту кривошипа. Масштабний коефіцієнт кута повороту: $\mu_\varphi = \frac{\varphi}{l_\varphi} = \frac{\text{рад}}{\text{мм}}$ (оскільки рух кривошипа рівномірний, то можна вважати, що по осі абсцис відкладений і кут повороту кривошипа, і час одного повного оберту). Отриманий відрізок ділимо на рівну кількість частин (вісім або дванадцять) і по осі ординат відкладаємо переміщення точки B в масштабі: $\mu_s = \frac{S_B^{MAX}}{l_s} = \frac{\text{м}}{\text{мм}}$, що відповідають положенню кривошипа в даний момент.

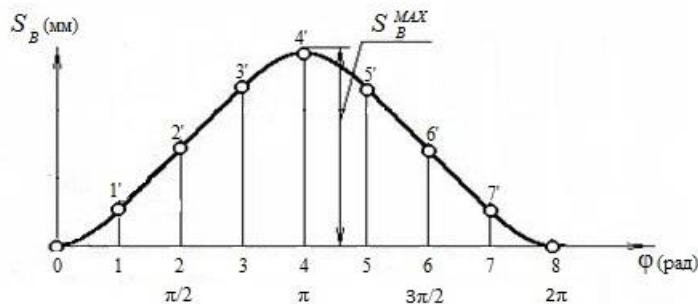


Рисунок 2.12 – Діаграма переміщень повзуна

При цьому відрізки

$$\begin{aligned} 1-1' &= \frac{B_0 B_1 \mu_l}{\mu_s}; & 5-5' &= 3-3'; \\ 2-2' &= \frac{B_0 B_2 \mu_l}{\mu_s}; & 6-6' &= 2-2'; \\ 3-3' &= \frac{B_0 B_3 \mu_l}{\mu_s}; & 7-7' &= 1-1'. \end{aligned}$$

Переміщення повзуна визначимо з плану положень механізму вимірюванням відповідних відрізків (див. рис. 2.11). З'єднавши отримані точки 0, 1', ... 8' плавною кривою, отримаємо діаграму переміщень повзуна.

Визначимо лінійні швидкості точок A , B , центру мас S шатуна і кутові швидкості ланок.

Лінійну швидкість точки A , що здійснює обертальний рух, визначимо за формулою (2.21) :

$$V_A = \omega_2 \cdot L_{OA}.$$

Вектор швидкості \vec{V}_A , прикладений в точці A , діє перпендикулярно положенню кривошипа ($\perp OA$) і спрямований у бік обертання.

Вектор швидкості точки B , що здійснює складний рух, наведемо як геометричну суму вектора швидкості точки A і вектора швидкості відносного обертового руху точки B навколо точки A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

При цьому вектор швидкості \vec{V}_B проходить паралельно напрямним ($\parallel OB$), а вектор швидкості \vec{V}_{BA} перпендикулярний шатуну ($\perp AB$).

Параметр, підкреслений двічі, відомий за величиною і напрямком; параметр підкреслений один раз відомий тільки за напрямком. Отримано векторне рівняння з двома невідомими, яке розв'язуємо графічним способом, використовуючи правило складання векторів (будуємо план швидкостей). Для цього виберемо масштабний коефіцієнт плану швидкостей, використовуючи відому швидкість точки A : $\mu_v = \frac{V_A}{l_{V_A}} = -\frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. Далі з полюса плану швидкостей P_v (рис. 2.13), згідно з векторним рівнянням, проводимо вектор швидкості \vec{V}_A у масштабі, тобто векторний відрізок $P_v a = l_{V_A}$. Потім через точку a проводимо лінію дії вектора \vec{V}_{BA} , перпендикулярну до прямої AB плану положень механізму, і через полюс P_v — пряму, паралельну руху повзуна, що відповідає напрямку дії вектора \vec{V}_B . На перетині цих двох прямих отримуємо точку b . Напрями векторів швидкостей \vec{V}_B і \vec{V}_{BA} указуємо стрілками.

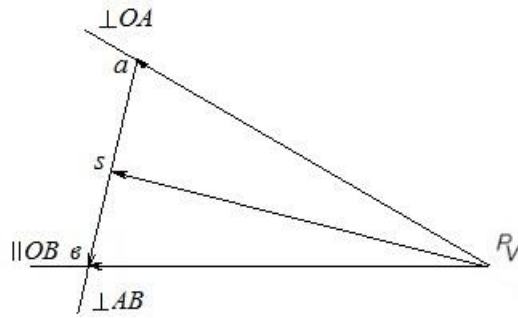


Рисунок 2.13 – План швидкостей

Для визначення швидкості точки S , що належить шатуну і розташована на середині відрізка AB , використовуючи теорему подібності, на відрізку ab плану швидкостей знаходимо його середину (точка s), яка, будучи сполученою з полюсом P_v , дасть вектор швидкості \vec{V}_s , що зображує абсолютну швидкість точки S .

Натуральні величини лінійних швидкостей визначимо з плану швидкостей за формулами:

$$V_B = |P_v b| \cdot \mu_v; \quad V_{BA} = |ab| \cdot \mu_v; \quad V_s = |P_v s| \cdot \mu_v.$$

Величини кутових швидкостей ланок визначимо за формулами:

$$\omega_3 = \frac{V_{BA}}{L_{BA}}; \quad \omega_4 = \frac{V_B}{\infty} = 0.$$

Визначимо лінійні прискорення точок A , B , S і кутові прискорення ланок. Для цього складемо векторні рівняння.

Вектор прискорення точки A є геометричною сумою вектора нормального прискорення і вектора тангенціального прискорення відносного обертального руху точки A навколо точки O :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Оскільки кутова швидкість обертання кривошипа ω_2 постійна і його кутове прискорення $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 0$, векторне рівняння прискорення точки A запишемо у вигляді:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n.$$

Величину нормальної складової прискорення розраховуємо за формулою $a_A^n = \omega_2^2 \cdot L_{OA}$. Вектор прискорення \vec{a}_A , прикладений у точці A , діє паралельно радіусу обертання і спрямований до центра обертання – точки O .

Вектор прискорення точки B , що здійснює складний рух, являє собою геометричну суму вектора прискорення точки A , вектора нормального прискорення

і вектора тангенціального прискорення відносного обертального руху точки B навколо точки A :

$$\underline{\vec{a}}_B = \underline{\vec{a}}_A + \underline{\vec{a}}_{BA}^n + \underline{\vec{a}}_{BA}^\tau.$$

Модуль вектора нормального прискорення точки B можемо знайти за формулою: $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot L_{AB}$.

Спрямований цей вектор від точки B до точки A .

Лінія дії вектора тангенціального прискорення \vec{a}_{BA}^τ проходить через точку B перпендикулярно положенню шатуна.

У той же час точка B належить повзуну. Повзун здійснює тільки прямолінійний зворотно-поступальний рух по напрямних, отже, лінія дії вектора прискорення \vec{a}_B проходить паралельно до прямої OB .

Розв'язуємо графічно векторне рівняння з двома невідомими, побудувавши план прискорень для заданого положення.

Вибираємо масштабний коефіцієнт прискорень, використовуючи відому величину нормального прискорення точки A : $\mu_a = \frac{a_A}{l_{a_A}} = -\frac{m/c^2}{mm}$. Величину нормального прискорення a_{BA}^n переводимо цим масштабом у векторний відрізок завдовжки $l_{a_{BA}}^n = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$.

З довільно вибраного полюса P_a паралельно відрізку OA плану механізму проводимо вектор прискорення \vec{a}_A , довжина якого l_{a_A} була вибрана довільно при розрахунку масштабного коефіцієнта μ_a . З кінця цього вектора (точка a) проводимо вектор прискорення \vec{a}_{BA}^n завдовжки $l_{a_{BA}}^n$, який має бути паралельним прямій AB плану механізму і спрямованим від точки B до A . Перпендикулярно йому через точку n проводимо пряму до перетину з прямою, проведеною через полюс P_a паралельно лінії руху повзуна OB . Отримана точка їх перетину b визначає довжини шуканих векторів прискорень (рис. 2.14).

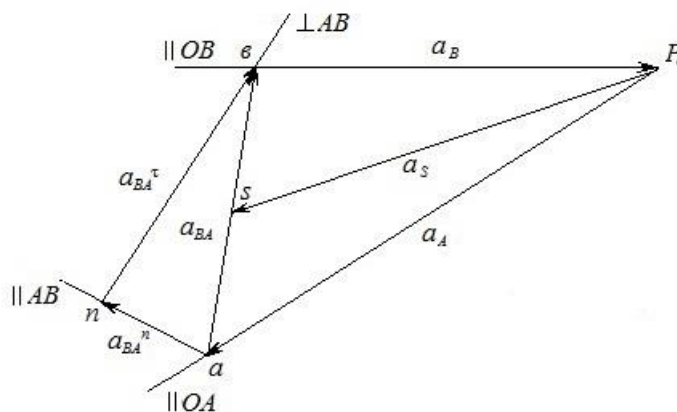


Рисунок 2.14 – План прискорень

Для знаходження величини прискорення точки S , що належить шатуну, можна застосувати теорему подібності. При цьому необхідно на векторі, що зображує на плані прискорень відносно прискорення $\overrightarrow{a_{BA}}$, знайти відповідну точку s , яка ділить відрізок ab в тій же пропорції, що і точка S ділить відрізок AB на плані механізму.

Використовуючи знайдені значення відрізків, визначимо модулі відповідних лінійних прискорень точок :

$$a_B = |bP_a| \cdot \mu_a; \quad a_{BA}^\tau = |nb| \cdot \mu_a; \quad a_{BA} = |ab| \cdot \mu_a; \quad a_S = |P_a s| \cdot \mu_a.$$

Визначимо кутові прискорення ланок. Як відзначалося раніше, кутова швидкість кривошипа ω_2 є постійною величиною, отже, кутове прискорення цієї ланки дорівнює нулю, тобто $\varepsilon_2 = 0$. Повзун здійснює тільки поступальний рух, отже, кутове прискорення цієї ланки теж дорівнює нулю — $\varepsilon_4 = 0$. Кутове прискорення шатуну обчислимо за формулою:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BA}^\tau}{L_{AB}}.$$

Напрямок вектора кутового прискорення шатуну $\overrightarrow{\varepsilon_3}$ визначається напрямком вектора тангенціального прискорення $\overrightarrow{a_{BA}^\tau}$.

Контрольні запитання

1. Векторний спосіб задання руху матеріальної точки.
2. Радіус-вектор, траєкторія, закон руху.
3. Швидкість, прискорення.
4. Координатний спосіб.
5. Природний спосіб.
6. Поступальний рух.
7. Обертальний рух. Кутова швидкість і прискорення.
8. Лінійна швидкість і прискорення при обертальному русі.
9. Складний рух. Коріолісове прискорення.
10. Кінематичний аналіз плоского механізму. Методи дослідження.

Лекція 3. Кінетика

1. Основні поняття і закони динаміки.
2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки. Завдання динаміки.
3. Аксиоми статyki і їх висновки.
4. Зв'язки. Реакції зв'язків.

Кінетика – розділ механіки, в якому вивчається рух і рівновага матеріальних тіл під дією сил, прикладених до цих тіл.

Як матеріальний об'єкт розглядається абсолютно тверде тіло. Кінетика поділяється на динаміку і статику.

Результатом взаємодії двох тіл є сила. Сила – вектор, який характеризується величиною, напрямом і точкою прикладення. Силу вимірюють у ньютонках [Н] (рис. 3.1). Зазвичай сила задається її проекціями на координатні осі ($F_x = F \cdot \cos(\vec{F} \wedge X)$; $F_y = F \cdot \sin(\vec{F} \wedge X)$).

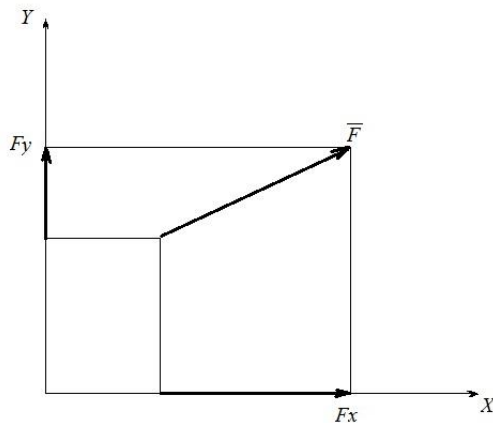


Рисунок 3.1 – Сила і її проекції

3.1. Основні поняття і закони динаміки

В основу кінетики покладено закони, які підтверджені численними експериментами і практичною діяльністю людства. Уперше вони були систематизовані і викладені І. Ньютоном у класичній роботі «Математичні начала натуральної філософії», виданої в 1687 р.

Перший закон Ньютона (закон інерції). Завжди існує така система відліку, в якій матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на неї не діють сили. Така система відліку називається інерціальною.

Другий закон (основний закон динаміки). Якщо в інерціальній системі відліку на матеріальну точку діє сила \vec{F} , то вона набуває прискорення \vec{a} у напрямку дії сили

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (3.1)$$

де m – маса тіла, яка є його мірою інертності.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії). Сили, з якими взаємодіють дві матеріальні точки або два матеріальні тіла, рівні за величиною, протилежні за напрямком і мають загальну лінію дії.

Ці сили взаємодії не утворюють урівноваженої системи сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Закон незалежності дії сил (складання сил). Матеріальна точка під дією декількох сил набуває прискорення, що дорівнює геометричній сумі прискорень, які вона отримує від кожної сили окремо.

Нехай тіло під дією системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ набуває прискорення: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$. Помножимо векторну рівність на скаляр m – маса тіла:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_1 + m \cdot \vec{a}_2 + \dots + m \cdot \vec{a}_n,$$

згідно з другим законом Ньютона

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.2)$$

Ця рівність називається основним рівнянням динаміки точки у разі дії системи сил.

Якщо одну систему сил можна замінити іншою і при цьому стан тіла не зміниться (руху або спокою), то такі системи називаються еквівалентними

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n).$$

Якщо систему сил можна замінити однією силою (еквівалентною), то така сила називається рівнодійною

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

3.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки. Завдання динаміки

Нехай $Oxyz$ – інерціальна система координат, M – точка маси, що рухається m ; \vec{R} – рівнодійна усіх сил, прикладених до точки; \vec{a} – прискорення точки (рис. 3.2).

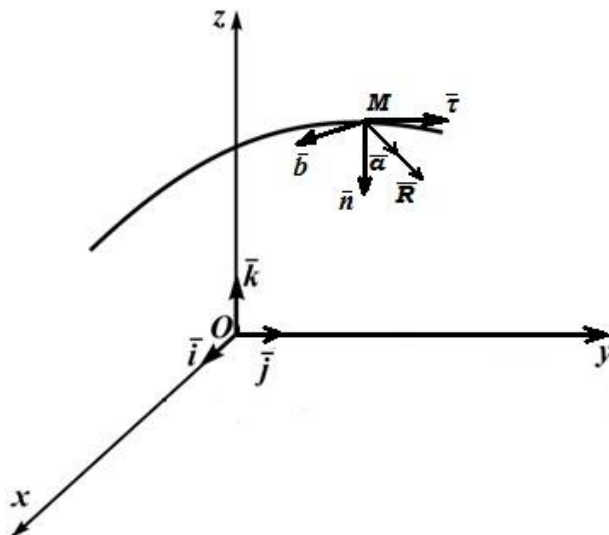


Рисунок 3.2 – Рух матеріальної точки у декартовій і природній системах

У будь-який момент часу для точки M можна записати основний закон динаміки у векторній формі $\vec{R} = m \cdot \vec{a}$. Спроектуємо компоненти цього векторного рівняння на координатні осі: $R_x = m \cdot a_x$; $R_y = m \cdot a_y$; $R_z = m \cdot a_z$. З кінематики відомо, що $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, тоді ця система рівнянь запишеться так:

$$\begin{cases} R_x = m \cdot \ddot{x}; \\ R_y = m \cdot \ddot{y}; \\ R_z = m \cdot \ddot{z}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Отримані рівняння (3.3) називають диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в декартовій системі координат.

Запишемо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на природні осі координат. Відповідно до формули кінематики для проекцій прискорення на природні осі можемо записати:

$$\begin{cases} R_n = m \cdot a_n = m \cdot \frac{V^2}{\rho}; \\ R_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{dV}{dt}; \\ R_b = m \cdot a_b = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Система рівнянь (3.4) – диференціальні рівняння руху матеріальної точки у природній формі. Багато завдань динаміки точки розв'язуються простіше, якщо скористатися диференціальними рівняннями руху в природній формі.

При розгляді динаміки руху розв'язуються два завдання:

- пряме завдання, коли при заданому законі руху і масі тіла визначаються сили, що діють на це тіло;

- зворотне завдання, коли при заданій масі тіла і відомих силах, що діють на тіло, визначається закон руху самого тіла.

В окремому випадку під дією сил тіло знаходиться в рівновазі, тобто зберігається стан спокою або рівномірного прямолінійного руху. Такий стан вивчає статика.

3.3. Аксиоми статички і їх висновки

Аксиома 1. Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, будуть урівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють по одній прямій і спрямовані у протилежні сторони (рис. 3.3).

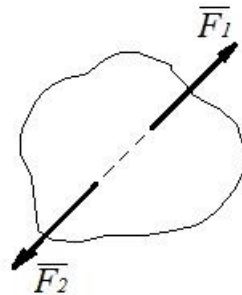


Рисунок 3.3 – Взаємоврівноважені сили

Це означає, що якщо абсолютно тверде тіло знаходиться у спокої під дією двох сил, то ці сили рівні за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, діють по одній прямій і спрямовані у протилежні сторони, тоді $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Така система сил еквівалентна нулю $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \rightarrow 0$.

Аксиома 2. Дія системи сил на тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відняти врівноважену систему сил.

Друга аксіома є логічним наслідком першої. Якщо дві взаємоврівноважені сили не чинять ніякої дії на тіло, то можна стверджувати, що будь-яка врівноважена система сил не впливає на тверде тіло незалежно від того, чи знаходилося тіло у спокої або в русі перед тим, як ми відкинули від нього або приклали до нього врівноважену систему сил.

З цієї аксіоми випливає: не порушуючи стану тіла, точку прикладення сили можна переносити уздовж лінії її дії (рис. 3.4).

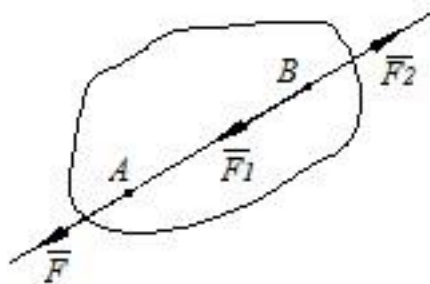


Рисунок 3.4 – Перенесення сили уздовж лінії її дії

Дійсно, нехай у точці A до тіла прикладена сила \vec{F} . Необхідно цю силу перенести у точку B по лінії її дії. Прикладемо у точці B на лінії дії сили \vec{F} дві врівноважені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , вважаючи, що $|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. Внаслідок цього дія сили на тіло не зміниться. Але сили \vec{F} і \vec{F}_2 згідно з першою аксіомою утворюють урівноважену систему сил, яка може бути відкинута. В результаті на тіло діятиме тільки одна сила \vec{F}_1 , що дорівнює \vec{F} , але прикладена в точці B . Звідси випливає, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, може бути перенесена у будь-яку точку по лінії її дії, тобто є ковзним вектором.

Аксіома 3. Рівнодійна двох сил, прикладених до твердого тіла в одній точці і спрямованих під кутом один до одного, прикладена в тій же точці, зображується за величиною і напрямком діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на двох сторонах (рис. 3.5) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

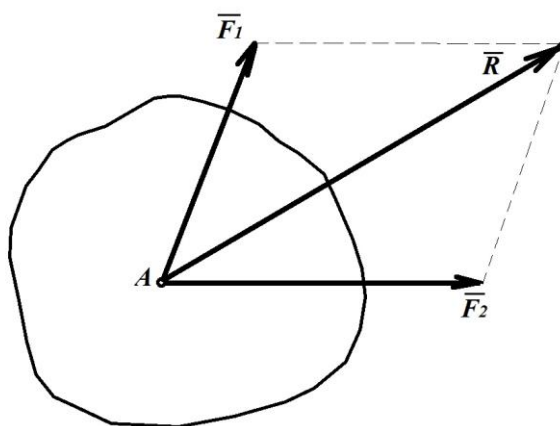


Рисунок 3.5 – Складання сил

Наслідком перших трьох аксіом є теорема про три непаралельні сили. Якщо прикладені до твердого тіла три непаралельні сили, що лежать в одній площині, знаходяться у рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 3.6).

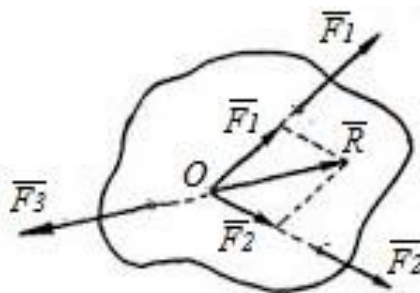


Рисунок 3.6 – Умова рівноваги тіла під дією трьох сил

Припустимо, що тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 і \vec{F}_3 . За третьою аксіомою статички рівнодійна перших двох сил може бути знай-

дена за правилом паралелограма, побудованого на силах \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , перенесених уздовж лінії їх дії в точку перетину, при цьому $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Згідно з першою аксіомою статички для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб сила \vec{F}_3 була такою, що урівноважує дві перші сили. Це можливо тільки у тому випадку, коли сили \vec{R} і \vec{F}_3 лежать на одній прямій і мають протилежні напрямки. Але тоді лінії дії сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 перетнуться в одній точці O .

Аксіома 4. Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні сторони (третій закон Ньютона або закон рівності сил дії і протидії).

Потрібно зазначити, що сили взаємодії двох тіл не складають систему рівноважених сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Аксіома 5. Рівновага тіла, що деформується, не порушиться, якщо жорстко зв'язати його точки і вважати тіло абсолютно твердим, таким, що не деформується (принцип твердіння).

Аксіома дозволяє досліджувати рівновагу фізичних тіл, що деформуються. Вона встановлює зв'язок між умовами рівноваги твердого тіла і тіла, що деформується. Умови рівноваги твердого тіла є необхідними, але не є достатніми для рівноваги тіла, що деформується. Якщо рівнянь рівноваги твердого тіла недостатньо, то складаються додаткові рівняння, де враховуються деформації тіла, як це робиться в опорі матеріалів і теорії пружності.

3.4. Зв'язки. Реакції зв'язків

Обмеження, тіла, що перешкоджають вільному руху, називаються зв'язками. Дія зв'язку на тіло називається реакцією зв'язку.

Розглянемо основні види механічних зв'язків.

Гладка поверхня

Реакцію зв'язку спрямовано по загальній нормалі до поверхонь дотичних тіл у точці їх дотику і прикладено до цієї точки (рис. 3.7).

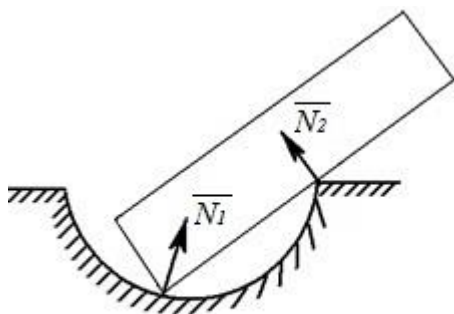


Рисунок 3.7 – Гладка поверхня

Гнучка нерозтяжна нитка

Реакцію зв'язку спрямовано уздовж нитки до точки підвішування (рис. 3.8).

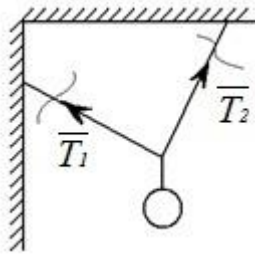


Рисунок 3.8 – Гнучка нерозтяжна нитка

Шарнірна опора

Шарнір припускає поворот навколо точки закріплення. Розрізняють два види шарнірів.

Рухливий шарнір. Стрижень, закріплений на шарнірі, може обертатися навколо шарніра, а точка кріплення може переміщатися уздовж тієї, що направляє (рис. 3.9, а). Реакція проходить через вісь шарніра і спрямована перпендикулярно опорній поверхні.

Нерухомий шарнір. Точка кріплення переміщатися не може. Стрижень може вільно обертатися навколо осі шарніра (рис. 3.9, б). Реакція такої опори \vec{N}_B проходить через вісь шарніра, але невідома за напрямком. Зазвичай її розкладають на дві складові \vec{R}_B і \vec{H}_B за двома взаємно перпендикулярними напрямками $|\vec{N}_B| = \sqrt{R_B^2 + H_B^2}$.

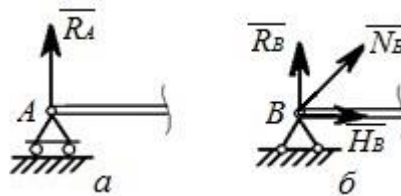


Рисунок 3.9 – Циліндричний шарнір

Якщо нерухомий шарнір сферичний (рис. 3.10), то його реакція розкладається на три складові \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B .

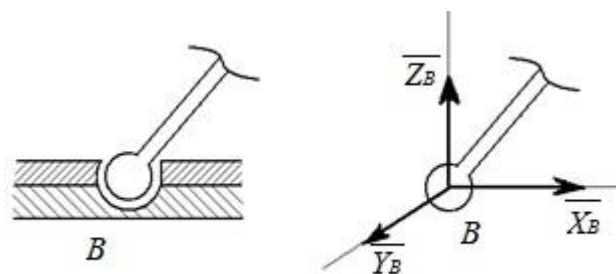


Рисунок 3.10 – Сферичний шарнір

Жорстке закладення (затискання)

Жорстке закладення не припускає ніякого переміщення тіла (рис. 3.11).

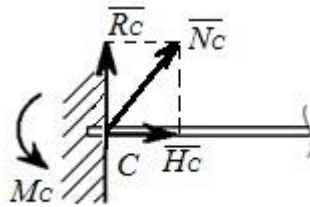


Рисунок 3.11 – Жорстке закладення

Знаходження реакції жорсткого закладення зводиться до визначення складових \vec{R}_c і \vec{H}_c , що перешкоджають лінійному переміщенню балки у площини дії сил, і реактивного моменту M_c , що перешкоджає обертанню балки під дією прикладених до неї сил.

Невагомий стрижень з шарнірами на кінцях

Реакцію зв'язку стрижня \vec{N} буде спрямовано уздовж осі стрижня, викликаючи його розтягнення або стиснення залежно від характеру зовнішніх сил (рис. 3.12).

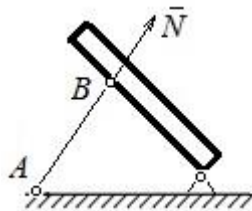


Рисунок 3.12 – Невагомий стрижень

Контрольні запитання

1. Кінетика, динаміка, статика. Сила, маса.
2. Основні закони динаміки.
3. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки.
4. Аксиоми статички.
5. Наслідки з аксіом статички.
6. Основні види зв'язків.

Лекція 4. Кінетика (продовження). Силовий аналіз плоского механізму

1. Перетворення сил і моментів.
2. Головний вектор і головний момент сил. Умови рівноваги тіла під дією довільної системи сил.
3. Сили, що діють на механізм.
4. Силовий аналіз плоского механізму.

4.1. Перетворення сил і моментів

Складання збіжних сил

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається системою збіжних сил.

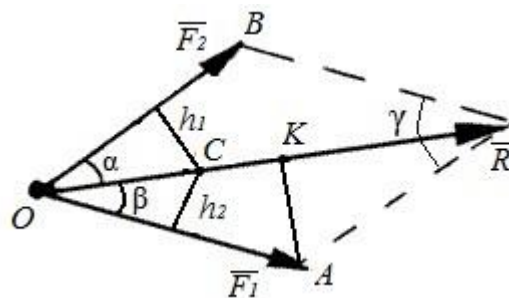


Рисунок 4.1 – Складання двох сил

Визначимо величину рівнодійної сили \vec{R} (рис. 4.1), яка згідно з третьою аксіомою статки для двох збіжних сил за величиною і напрямком є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на двох сторонах. Величина її може бути визначена за теоремою косинусів :

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma)}. \quad (4.1)$$

Опустимо з довільної точки C перпендикуляри на напрямки сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Отримаємо відрізки h_1 , h_2 – плечі сил відносно точки C (рис. 4.1). При цьому $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. З іншого боку, проаналізувавши довжину відрізка AK , можемо записати:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2. \quad (4.2)$$

Множення сили на плече називається моментом сили відносно точки. Тоді з (4.2) випливає, що моменти збіжних сил відносно будь-якої точки, що лежить на лінії дії рівнодійної, рівні між собою.

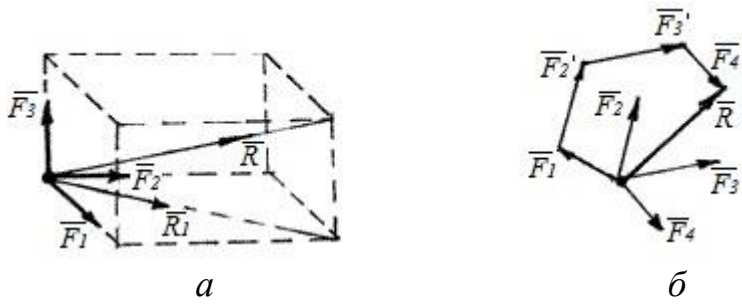


Рисунок 4.2 – Складання системи сил

При розгляді системи збіжних сил їх рівнодійну може бути отримано або послідовним складанням сил (рис. 4.2, а), або побудовою силового багатокутника (рис. 4.2, б).

Складання паралельних сил

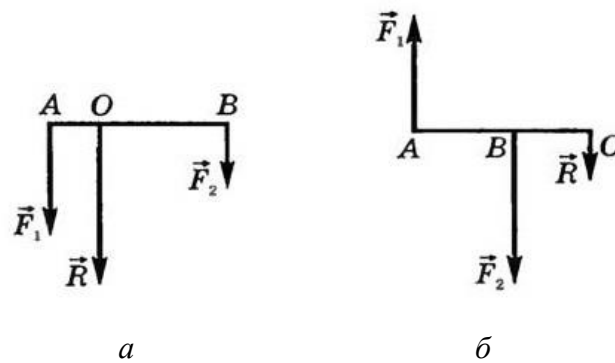


Рисунок 4.3 – Паралельні сили

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік (рис. 4.3, а), дорівнює за величиною їх алгебраїчній сумі $|\vec{R}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$, паралельна їм, спрямована у ту саму сторону і прикладена до точки O , яка ділить відрізок AB обернено пропорційно до величин сил \vec{F}_1, \vec{F}_2

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{OB}{OA}.$$

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у протилежні сторони (рис. 4.3, б), дорівнює за величиною їх алгебраїчній різниці $|\vec{R}| = |\vec{F}_2| - |\vec{F}_1|$, паралельна їм, спрямована у бік дії більшої сили і прикладена до точки O , відносно якої сума моментів початкових сил дорівнює нулю

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{OB}{OA}.$$

Якщо на тіло діє декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти, послідовно застосовуючи правила складання двох сил.

Пара сил

Парою сил називається система двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) (рис. 4.4).

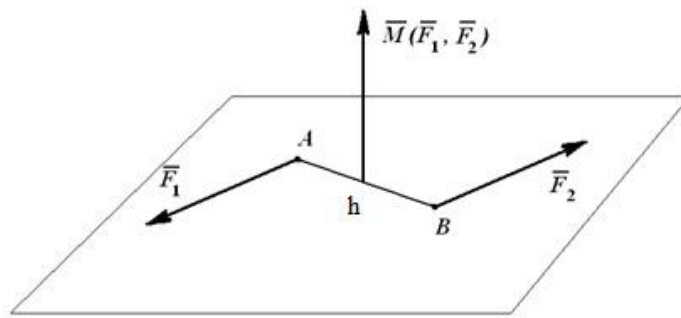


Рисунок 4.4 – Пара сил

Пара сил не має рівнодійної. Сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, оскільки їх проекції завжди рівні і протилежні за знаком. Площину, що проходить через лінії дії сил, називають площиною дії пари.

Пара сил чинить обертальну дію, яка може бути оцінена моментом пари $M = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h$, де h – плече пари сил. Напрямок моменту M перпендикулярний площині пари сил і вважається додатним, якщо поворот, що здійснюється парою сил, спрямований проти ходу годинникової стрілки (рис. 4.4 – момент пари сил додатний).

Дія, яку створює пара сил на тіло, не зміниться, якщо пару сил переносити у будь-яку точку площини пари сил або в площину їй паралельну. Отже, вектор моменту пари сил може бути прикладений (чи перенесений) до будь-якої точки твердого тіла, на яке діє пара сил.

Пари сил можна складати і віднімати.

Паралельне перенесення сили в довільну точку

Для перенесення сили \vec{F} з точки A твердого тіла в точку B прикладемо в B систему двох сил \vec{F}' і \vec{F}'' – еквівалентну нулю, причому нехай $|\vec{F}| = |\vec{F}'| = |\vec{F}''|$ (рис. 4.5). Тоді сила \vec{F} еквівалентна такій же за величиною силі \vec{F}' , прикладеній у точці B , і парі сил (\vec{F}, \vec{F}'') , момент якої $M = F \cdot h$, де h – довжина відрізка AB .

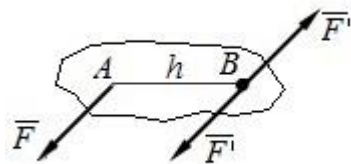


Рисунок 4.5 – Приведення сили

Момент сили відносно точки

Момент сили відносно точки характеризує обертання тіла відносно точки. Якщо відомий радіус-вектор \vec{r} точки прикладення сили \vec{F} відносно точки O (рис. 4.6), то момент цієї сили відносно O виражається так:

$$\overrightarrow{Mo}(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (4.3)$$

Число момент сили відносно точки дорівнює:

$$Mo = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\alpha) = F \cdot h, \quad (4.4)$$

де h – плече сили \vec{F} відносно точки O .

Вектор \overrightarrow{Mo} , як результат векторного множення, перпендикулярний векторам \vec{F} і \vec{r} , які належать площині OAB , і спрямований таким чином, що якщо дивитися назустріч ньому, площина обертається проти ходу годинникової стрілки.

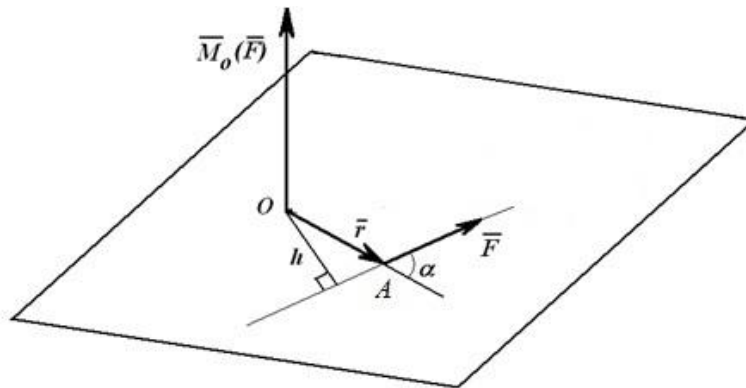


Рисунок 4.6 – Момент сили відносно точки

На рис. 4.6 видно, що якщо силу перенести уздовж лінії дії в іншу точку, то величина і знак моменту не зміняться.

Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі характеризує обертання тіла відносно осі і обчислюється як момент проекції сили \vec{F}_Π на площину XOY , перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною (рис. 4.7):

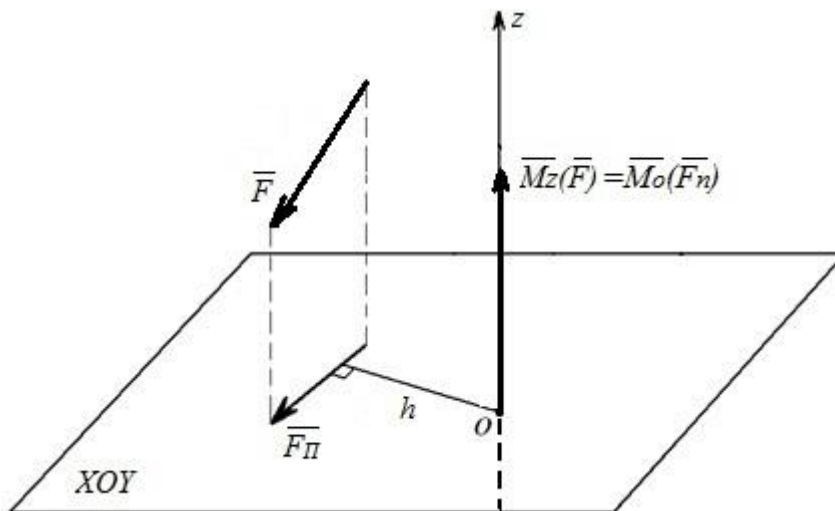


Рисунок 4.7 – Момент сили відносно осі z

Числово момент сили відносно осі дорівнює:

$$M_z(\vec{F}) = Mo(\vec{F}_\Pi) = F_\Pi \cdot h. \quad (4.5)$$

Знак моменту визначається напрямком обертання, яке прагне надати тілу сила \vec{F}_Π , аналогічно, як для моменту сили відносно точки.

Послідовність обчислень :

- 1) проводиться площина XOY , перпендикулярна осі z ;
- 2) знаходиться положення точки O , перетини осі z і площини XOY ;
- 3) проектується сила \vec{F} на площину XOY і знаходиться \vec{F}_Π ;
- 4) з точки O опускається перпендикуляр на напрямок сили \vec{F}_Π ;
- 5) визначається величина моменту $M_z(\vec{F}) = Mo(\vec{F}_\Pi) = F_\Pi \cdot h$;
- 6) визначається напрямок вектора $M_z(\vec{F})$ уздовж осі z .

4.2. Головний вектор і головний момент сил. Умови рівноваги тіла під дією довільної системи сил

Нехай на тіло діє довільна система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Зводимо її до центра O (рис. 4.8). При цьому довільна просторова система сил зводиться до головного вектора і головного моменту.

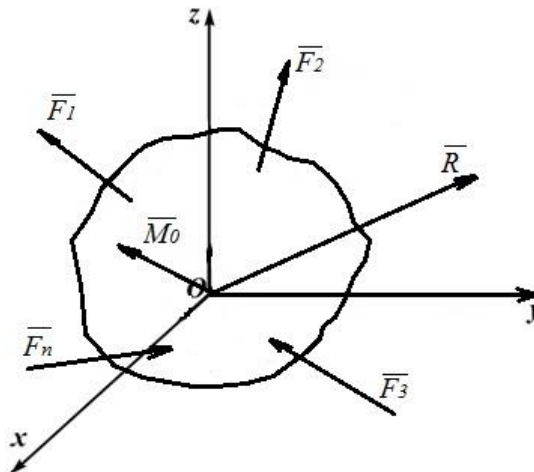


Рисунок 4.8 – Приведення просторової системи сил

Головним вектором системи сил \vec{R} називається векторна сума цих сил, тобто $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Головним моментом системи сил відносно точки \vec{M}_O називається векторна сума моментів цих сил відносно цієї точки: $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Аналітично головний вектор і головний момент відносно точки визначаються трьома своїми проекціями на координатні осі:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases} \quad \begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_x(F_i); \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_y(F_i); \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_z(F_i). \end{cases} \quad (4.6)$$

Абсолютні значення головного вектора і головного моменту визначаються за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Для того щоб тіло знаходилося у рівновазі під дією довільної системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, необхідно і достатньо рівності нулю головного вектора і головного моменту сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Запишемо шість рівнянь рівноваги в аналітичному вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Записані рівняння рівноваги просторової системи сил відповідають аналітичному зображенню рівності нулю шести незалежних можливих переміщень тіла у просторі: трьох переміщень уздовж координатних осей і трьох обертань навколо цих осей.

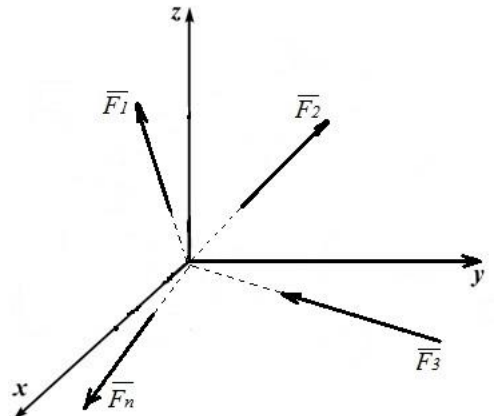


Рисунок 4.9 – Збіжна система сил

Система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ називається збіжною, якщо лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 4.9).

Якщо на тіло діє система збіжних сил, то частина рівнянь рівноваги (4.7) тотожно дорівнюватиме нулю, а саме обертання навколо осей, і тоді:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

У цьому випадку для того, щоб система збіжних сил була врівноваженою, необхідно і достатньо рівності нулю сум проекцій усіх сил на координатні осі за трьома переміщеннями.

Система сил називається плоскою, якщо всі сили, що діють на тіло, лежать в одній площині (рис. 4.10).

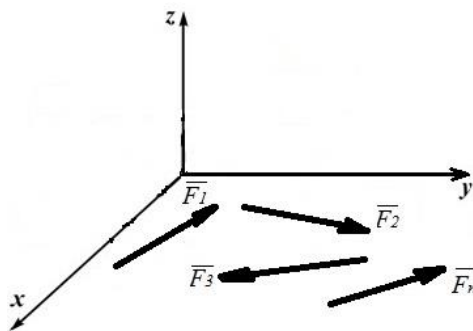


Рисунок 4.10 – Плоска система сил

При дії плоскої системи сил рівняння (4.7) спростяться до такого вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Звідки, для дотримання умов рівноваги тіла під дією плоскої системи сил необхідно і достатньо рівності нулю сум проекцій усіх сил на координатні осі за двома переміщеннями і рівності нулю суми моментів сил відносно будь-якої точки, розташованої у площині їх дії.

4.3. Сили, що діють на механізм

Для проведення силового розрахунку механізму необхідно вивчити сили, що діють на його ланки. З точки зору розв'язання завдань динаміки сили можна класифікувати таким чином:

1. Зовнішні і внутрішні.

- Зовнішні – це сили взаємодії ланки механізму з якимись тілами, що не входять до складу механізму;
- Внутрішні сили – сили взаємодії між ланками механізму (реакції зв'язків у кінематичних парах).

З умови рівності сил дії і протидії можна стверджувати, що для внутрішніх сил головний вектор \vec{R} і головний момент \vec{M}_O дорівнюють нулю.

2. Рушійні сили.

Рушійні сили – це сили, які прикладаються до ведучої ланки, спрямовані у бік руху ланки і розвивають позитивну потужність. Рушійні сили долають опір інших сил, прикладених до механізму.

3. Сили корисного опору.

Сили корисного опору – це сили, для подолання яких і створений механізм, прикладаються до замикальної ланки і спрямовані у бік, протилежний переміщенню цієї ланки. Долаючи сили корисного опору, механізм створює корисну роботу.

4. Сили шкідливого опору.

Сили шкідливого опору – це сили, на подолання яких витрачається потужність, і ця потужність втрачається безповоротно. Зазвичай шкідливими силами опору виступають сили тертя (сили, що чинять опір відносному переміщенню дотичних поверхонь при русі ланок одна відносно одної у кінематичних парах).

У силових розрахунках силами тертя нехтують.

5. Сили інерції, моменти сил інерції.

Сили інерції – це сили, які виникають через наявність маси ланки і її руху із прискоренням. Для спрощення розрахунків зазвичай масу ланки зводять до центра мас, тобто геометричної точки, положення якої визначають за такими формулами (рис. 4.11) :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \cdot \vec{r}_k}{\sum m_k}; \quad x_c = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{\sum m_k}; \quad y_c = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{\sum m_k}.$$

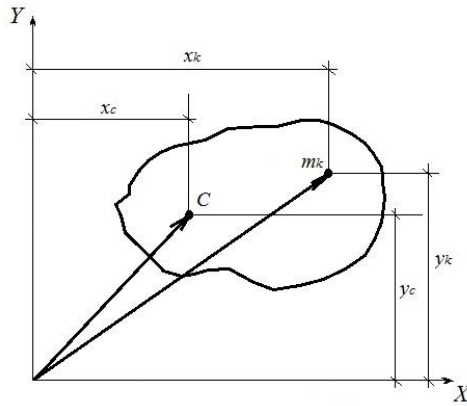


Рисунок 4.11 – Визначення центра мас

Сила інерції ланки чинить опір його прискоренню і діє на те тіло, яке викликає це прискорення. У загальному випадку при нерівномірному русі виникає сила інерції і момент сил інерції:

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_s; \quad \vec{M}_i = -I_s \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (4.10)$$

де m – маса ланки (зосереджена в центрі мас); I_s – момент інерції ланки; \vec{a}_s – абсолютне прискорення центра мас ланки; $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення ланки.

Знак мінус у формулах (4.10) показує, що сила інерції спрямована протилежно прискоренню центру мас ланки, а момент сил інерції спрямований протилежно кутовому прискоренню ланки.

Якщо ланка рухається поступально, тобто $\vec{\varepsilon} = 0$ отже $\vec{M}_i = 0$ тоді діє тільки сила інерції \vec{F}_i , прикладена до центра мас. Якщо ланка обертається навколо осі, яка проходить через центр мас, то $\vec{a}_s = 0$ і $\vec{F}_i = 0$, тоді за умови, що $\vec{\varepsilon} \neq 0$, на ланку діятиме тільки момент сил інерції \vec{M}_i . Якщо обертання відбувається навколо осі, яка не проходить через центр мас, то на ланку діятимуть \vec{F}_i і \vec{M}_i .

6. Сили тяжіння.

Сили тяжіння – це сили взаємодії ланок механізму з гравітаційним полем Землі. Прикладаються до центра мас і спрямовуються до центра Землі (вертикально вниз)

$$G = m \cdot g,$$

де g – прискорення земного тяжіння.

4.4. Силевий аналіз плоского механізму

Силевий аналіз зводиться до визначення невідомих сил, що діють на ланки механізму. Для визначення невідомих сил використовуються статичні рівняння рівноваги. Але механізм є нерівноважною системою, оскільки більшість його ланок мають нерівномірний рух, а точки, що належать до цих ланок, рухаються по

складних криволінійних траєкторіях. Тому для розв'язання поставленого завдання застосовується метод кінетостатики, заснований на принципі Даламбера: якщо до усіх зовнішніх сил, що діють на ланки механізму, додати сили інерції і моменти сил інерції, то цей механізм знаходитиметься у стані статичної рівноваги. Це штучний прийом, що надає нерівноважній системі стану рівноваги.

Застосувавши цей прийом, можна робити силовий розрахунок із використанням рівнянь статички, які у цьому випадку називаються рівняннями кінетостатики. Для того щоб такі системи рівнянь розв'язувалися, потрібне виконання умови кінетостатичної визначеності – кількість рівнянь кінетостатики повинно дорівнювати кількості невідомих реакцій.

Для плоского кінематичного ланцюга умову кінетостатичної визначеності можна подати у такому вигляді:

$$3(n-1) = 2P_H - P_B, \quad (4.11)$$

де $3(n-1)$ – кількість незалежних рівнянь кінетостатики; $n-1$ – кількість рухливих ланок механізму; P_H – кількість нижчих кінематичних пар; P_B – кількість вищих кінематичних пар.

Якщо припустити, що вищі кінематичні пари відсутні, тоді рівняння (4.11) набере вигляду:

$$3(n-1) = 2P_H.$$

Така рівність можлива для кінематичного ланцюга при $(n-1)=2$ і $P_H=3$, який називається діадою (вона включає дві рухливі ланки і три нижчі кінематичні пари).

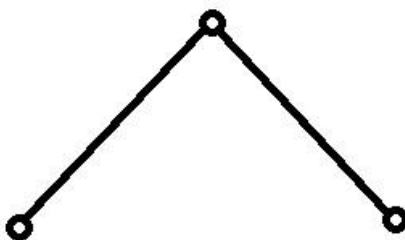


Рисунок 4.12 – Кінематичний ланцюг-діада

Формула (4.11) співпадає з формулою Чебишева для визначення кількості степенів вільності плоского кінематичного ланцюга. У результаті можна сформулювати умову кінетостатичної визначеності кінематичного ланцюга таким чином: кінематичний ланцюг кінетостатично визначений у тому випадку, коли кількість невідомих зовнішніх сил, що діють на його ланки, не перевищує кількості степенів вільності цього ланцюга.

Порядок силового розрахунку механізму такий:

- розбивають механізм на діади, взявши як початкову ту ланку, на яку діє невідома зовнішня сила;
- розв'язання розпочинають з останньої діади і закінчують початковою ланкою.

При такому підході на діади завжди діятимуть тільки відомі зовнішні сили, і з розгляду їх рівноваги будуть визначені реакції в кінематичних парах, а при розгляді умов рівноваги початкових ланок будуть визначені реакції, що залишилися, і невідомі зовнішні сили.

Виконаємо кінетостатичний (силовий) розрахунок кривошипно-повзунного механізму, того, що розглядався раніше. У ході розрахунку визначимо зрівноважувальну силу і реакції у кінематичних парах.

Силовий аналіз для вибраного положення досліджуваного механізму (див. рис. 2.11) проводимо від діади шатун-повзун, до якої прикладено силу корисного опору, до початкової ланки.

Спочатку визначимо зовнішні сили, що прикладаються до ланок механізму. Це сили тяжіння, інерції, сила корисного опору.

Сили тяжіння ланок розраховуємо за формулами:

$$G_3 = m_3 \cdot g ; \quad G_4 = m_4 \cdot g ,$$

де m_3, m_4 – маси відповідно шатуна і повзуна. Спрямовані вектори сил тяжіння завжди вертикально вниз, прикладені у центрах мас ланок.

Для визначення сил інерції ланок використовуємо результати проведеного раніше кінематичного аналізу, скористаємося планом прискорень (див. рис. 2.14).

З урахуванням того, що центр мас кривошипа вважаємо розташованим у точці O і кутове прискорення $\varepsilon_2 = 0$, то сили інерції і моменти сил інерції, які впливають на кривошип, відсутні.

Система сил інерції для шатуна складається з головного вектора \vec{F}_{i3} і головного моменту M_{i3} , їх значення визначимо за формулами:

$$F_{i3} = m_3 \cdot a_S ; \quad M_{i3} = I_{S3} \cdot \varepsilon_3 ,$$

де I_{S3} – момент інерції мас шатуна відносно точки S ; a_S – прискорення центра мас шатуна і ε_3 – кутове прискорення шатуна, приймаємо з плану прискорень. Напрямок вектора \vec{F}_{i3} протилежний напрямку вектора \vec{a}_S , а точка прикладення – центр мас шатуна S . Напрямок моменту M_{i3} протилежний напрямку ε_3 , визначаємо за напрямком вектора тангенціального складового прискорення шатуна \vec{a}_{BA}^{τ} .

Сили інерції повзуна, який здійснює поступальну ходу, складатимуться тільки з головного вектора сил, величину якого визначимо таким чином:

$$F_{i4} = m_4 \cdot a_B ,$$

де a_B – прискорення центра мас повзуна (точка B). Напрямок вектора \vec{F}_{i4} протилежний напрямку вектора \vec{a}_B , а точка прикладення – центр шарніра B .

Величини сил корисного опору задані (зазвичай у вигляді діаграми). Напрямок вектора сили корисного опору $\vec{F}_{\text{ко}}$ протилежний напрямку вектора швидкості повзуна \vec{v}_B . Прикладена сила $\vec{F}_{\text{ко}}$ у точці B .

Як було зазначено раніше, розрахунок розпочнемо з діади шатун-повзун. Виділимо її з плану положень (див. рис. 2.11). До ланок діади у точках прикладення відповідних сил прикладаємо сили тяжіння \vec{G}_3 і \vec{G}_4 , сили інерції \vec{F}_{i3} , \vec{F}_{i4} , момент сил інерції M_{i3} і силу корисного опору $\vec{F}_{\text{ко}}$. Відкинуті зв'язки замінимо реакціями – в шарнірі A \vec{R}_{23} , яку для зручності розрахунків розкладемо на складові: нормальну \vec{R}_{23}^n , лінія дії якої паралельна AB , і тангенціальну \vec{R}_{23}^t , спрямовану по перпендикуляру до AB ; у парі повзун-напрямні \vec{R}_{14} лінія її дії перпендикулярна напрямним. Знак напрямку векторів реакцій указуємо довільно і уточнюємо при подальших розрахунках. Отриману схему наведено на рис. 4.13.

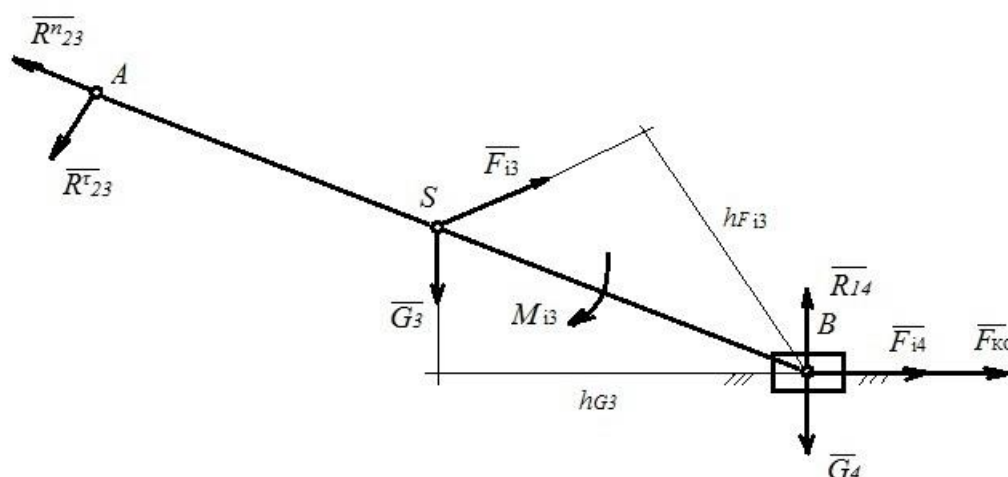


Рисунок 4.13 – Схема прикладення сил до діади шатун-повзун

Для визначення величини і напрямку реакції \vec{R}_{23}^t складемо рівняння рівноваги моментів сил відносно точки B (рис. 4.13):

$$\sum M_B = 0 \quad R_{23}^t \cdot l_{AB} \cdot \mu_l - F_{i3} \cdot h_{Fi3} \cdot \mu_l + G_3 \cdot h_{G3} \cdot \mu_l - M_{i3} = 0.$$

З отриманого рівняння визначимо величину реакції \vec{R}_{23}^t :

$$R_{23}^t = \frac{F_{i3} \cdot h_{Fi3} \cdot \mu_l - G_3 \cdot h_{G3} \cdot \mu_l + M_{i3}}{l_{AB} \cdot \mu_l}.$$

Реакції $\overrightarrow{R_{23}^n}$ і $\overrightarrow{R_{14}}$ визначимо графічно з умови статичної рівноваги діади шатун-повзун. Напишемо векторне рівняння, групуючи усі сили, що діють на третю ланку (шатун), потім сили, що діють на четверту ланку (повзун). Сили, що діють на одну ланку, можуть розташовуватися у будь-якій послідовності, зручній для наочності креслення. Невідома реакція $\overrightarrow{R_{23}^n}$ має бути на початку формули, а друга невідома реакція $\overrightarrow{R_{14}}$ – у кінці:

$$\overrightarrow{R_{23}^n} + \overrightarrow{R_{23}^r} + \overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{F_{i3}} + \overrightarrow{G_4} + \overrightarrow{F_{i4}} + \overrightarrow{F_{KO}} + \overrightarrow{R_{14}} = 0.$$

План сил будуємо у масштабі $\mu_F = \frac{F_{KO}}{l_{F_{KO}}} = \frac{H}{\text{мм}}$. Визначимо довжини векторів сил у масштабі:

$$l_{R_{23}^r} = \frac{R_{23}^r}{\mu_F}; \quad l_{G_3} = \frac{G_3}{\mu_F}; \quad l_{G_4} = \frac{G_4}{\mu_F}; \quad l_{F_{i3}} = \frac{F_{i3}}{\mu_F}; \quad l_{F_{i4}} = \frac{F_{i4}}{\mu_F}.$$

Через довільну точку P_F проводимо лінію дії вектора $\overrightarrow{R_{23}^n}$ паралельно AB . З цієї ж точки проводимо вектор $\overrightarrow{R_{23}^r}$ перпендикулярно положенню шатуна завдовжки $l_{R_{23}^r}$. До нього згідно з рівнянням послідовно додаємо інші відомі вектори сил. Далі через кінець вектора $\overrightarrow{F_{KO}}$ проводимо лінію дії реакції $\overrightarrow{R_{14}}$ перпендикулярно OB . Відповідно до статичної рівноваги групи шатун-повзун багатокутник сил має бути замкнутим. Точка перетину ліній дії векторів $\overrightarrow{R_{23}^n}$ і $\overrightarrow{R_{14}}$ (точка k) визначить їх величину і знак напрямку. Повну реакцію $\overrightarrow{R_{23}}$ у шарнірі A визначимо як суму векторів $\overrightarrow{R_{23}^r}$ і $\overrightarrow{R_{23}^n}$ (рис. 4.14). Для визначення реакції у шарнірі B складемо рівняння рівноваги сил, що діють на шатун:

$$\overrightarrow{R_{23}} + \overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{F_{i3}} + \overrightarrow{R_{34}} = 0.$$

Тоді з плану сил (рис. 4.14) вектор, що сполучає кінець вектора $\overrightarrow{F_{i3}}$ і початок вектора $\overrightarrow{R_{23}}$, визначить реакцію $\overrightarrow{R_{34}}$.

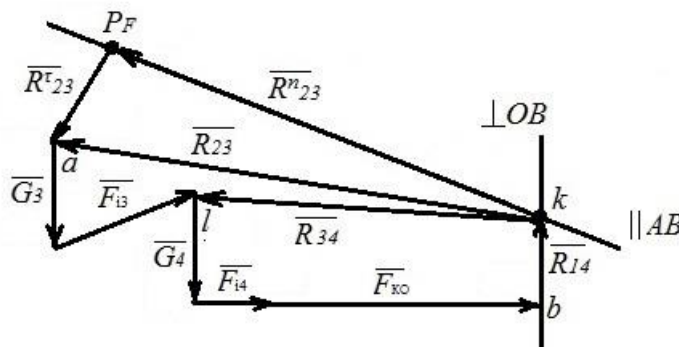


Рисунок 4.14 – План сил

Помноживши відповідні довжини на масштабний коефіцієнт, отримаємо:

$$R_{23}^n = |kP_F| \cdot \mu_F; \quad R_{23} = |ka| \cdot \mu_F; \quad R_{14} = |bk| \cdot \mu_F \quad R_{34} = |kl| \cdot \mu_F.$$

Після визначення реакцій у діаді шатун-повзун проводимо силовий аналіз початкової ланки – кривошипа.

Прикладемо до виділеного з плану положень механізму (див. рис. 2.11) кривошипа реакцію зв'язку в шарнірі A \vec{R}_{32} , рівну за величиною, але протилежно спрямовану реакції \vec{R}_{23} , і зрівноважувальну силу \vec{F}_3 , вектор якої прикладаємо в точці A перпендикулярно положенню кривошипа за напрямком обертання (рис. 4.15).

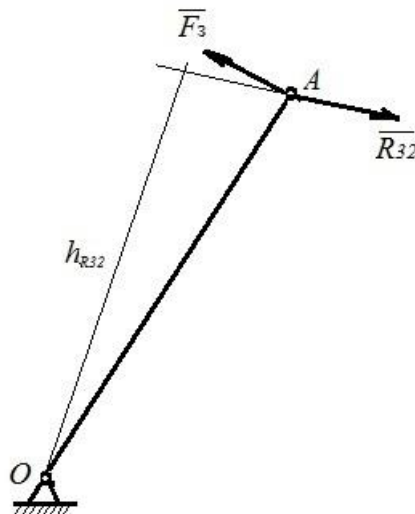


Рисунок 4.15 – Схема прикладення сил до кривошипа

Для визначення зрівноважувальної сили \vec{F}_3 складемо рівняння рівноваги моментів сил, що діють на кривошип відносно точки O :

$$F_3 \cdot l_{OA} \cdot \mu_l - R_{32} \cdot h_{R32} \cdot \mu_l = 0.$$

З отриманого рівняння визначимо F_3 :

$$F_3 = \frac{R_{32} \cdot h_{R32}}{l_{OA}}.$$

У тих випадках, коли потрібно знайти тільки зрівноважувальну силу \vec{F}_3 без визначення реакцій у кінематичних парах, зручно скористатися методом Жуковського, не вдаючись до послідовного силового розрахунку всього механізму.

Метод заснований на принципі можливих переміщень. Згідно з цим принципом для рівноваги механічної системи необхідно і достатньо, щоб сума робіт усіх прикладених до системи активних сил за будь-яким можливим переміщенням системи дорівнювала нулю

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dS_i \cdot \cos(\alpha_i) = 0, \quad (4.12)$$

де $\cos(\alpha_i) = \cos(\vec{F}_i \wedge \vec{v}_i)$.

Перейдемо до конкретного миттєвого положення механізму, розділивши всі члени на нескінченно малий проміжок часу (dt), за який відбуваються вказані малі переміщення:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{dS_i}{dt} \cdot \cos(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos(\alpha_i) = 0. \quad (4.13)$$

Таким чином, рівняння робіт трансформується у рівняння миттєвих потужностей, і принцип можливих переміщень щодо механізму можна сформулювати так – якщо механізм знаходиться у рівновазі, то сума миттєвих потужностей усіх активних зовнішніх сил, прикладених до ланок механізму, дорівнює нулю.

Для складання рівняння 4.13 використовується важіль Жуковського – план швидкостей механізму, повернений на 90° , у відповідні точки якого прикладаємо усі зовнішні сили, що діють на ланки механізму. Узявши суму моментів цих сил відносно полюса плану швидкостей, фактично отримуємо рівняння потужностей, що розвиваються ними.

Скориставшись отриманим рівнянням, можемо визначити невідому зрівноважувальну силу \vec{F}_3 .

Виконаємо неповний кінетостатичний аналіз на прикладі кривошипно-повзунного механізму, який розглядався раніше.

Згідно з методом Жуковського план швидкостей (див. рис. 2.13) повертаємо на 90° у будь-яку сторону. У відповідні точки на плані переносимо усі задані зовнішні сили, прикладені до механізму. Для цього спочатку у відповідні точки розрахункової схеми механізму наносимо зовнішні сили, а момент сил інерції M_{i3} замінюємо парою сил \vec{F}_i' і \vec{F}_i'' , прикладених у точках A і B перпендикулярно до ланки AB у ту сторону, щоб створюваний ними момент дорівнював M_{i3} :

$$\left| \vec{F}_i' \right| = \left| \vec{F}_i'' \right| = \frac{M_{i3}}{l_{AB} \cdot \mu_l}.$$

Здійснивши паралельне перенесення усіх сил зі схеми механізму на важіль Жуковського, отримаємо розрахункову схему (рис. 4.16).

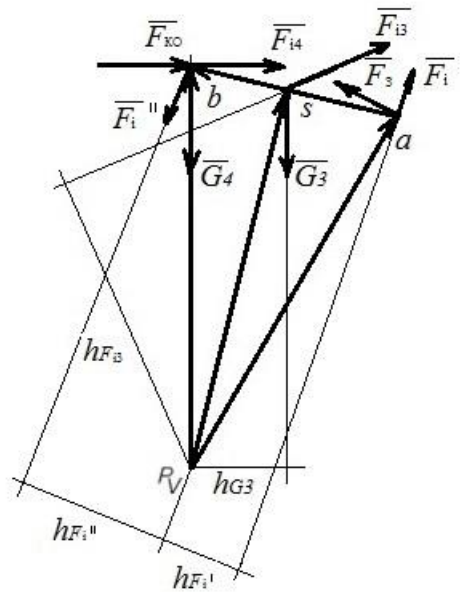


Рисунок 4.16 – Важіль Жуковського

Складемо рівняння рівноваги моментів усіх сил відносно полюса плану швидкостей точки P_v :

$$F_3 \cdot |P_v a| \cdot \mu_v - F_{i3} \cdot h_{F_{i3}} \cdot \mu_v - G_3 \cdot h_{G_3} \cdot \mu_v - F_{KO} \cdot |P_v b| \cdot \mu_v - F_{i4} \cdot |P_v b| \cdot \mu_v + \\ + F_{i1}' \cdot h_{F_{i1}'} \cdot \mu_v + F_{i3}'' \cdot h_{F_{i3}''} \cdot \mu_v = 0.$$

З цього рівняння визначаємо величину зрівноважувальної сили F_3 :

$$F_3 = \frac{\sum F_i \cdot h_{F_i}}{h_{F_3}}.$$

Контрольні запитання

1. Складання збіжних сил. Складання паралельних сил.
2. Пара сил. Перенесення сили в точку.
3. Момент сили відносно точки. Момент сили відносно осі.
4. Головний вектор, головний момент. Умова рівноваги.
5. Сили, що діють на механізм.
6. Силевий аналіз плоского механізму.
7. Важіль Жуковського.

Список літератури

1. Павлище В.Т. Прикладна механіка : навч. посіб. / В.Т. Павлище, Є.В. Харченко, А.Ф. Барвінський – Львів : Інтелект-Захід, 2004. – 368 с.
2. Ковалев Н.А. Прикладная механика : учеб. для студ. инженер.-техн. и инженер.-эконом. спец. вузов / Н. А. Ковалев. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.
3. Заблонский К.И. Прикладная механика : учеб. пособие для студ. инженер.-техн. спец. вузов / К.И. Заблонский, М. С. Беяев, И. Я. Телис – К. : Вища школа, 1979. – 280 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С.М. Тарг – М. : Наука, 1974. – 478 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Лекція 1. Структурний аналіз механізму. Основні поняття і визначення.....	5
1.1. Ланка, кінематична пара і їх класифікація.....	5
1.2. Кінематичний ланцюг і його структура. Міра рухливості ланки. Механізм.....	5
1.3. Схеми плоских механізмів.....	7
1.4. Структурний аналіз плоских механізмів.....	8
Контрольні запитання.....	10
Лекція 2. Кінематика.....	10
2.1. Загальні поняття і визначення.....	10
2.2. Кінематика матеріальної точки.....	10
2.3. Кінематика абсолютно твердого тіла.....	15
2.4. Кінематичне дослідження плоских механізмів.....	20
Контрольні запитання.....	26
Лекція 3. Кінетика.....	27
3.1. Основні поняття і закони динаміки.....	27
3.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки. Завдання динаміки.....	28
3.3. Аксиоми статички і їх висновки.....	30
3.4. Зв'язки. Реакції зв'язків.....	32
Контрольні запитання.....	34
Лекція 4. Кінетика (продовження). Силовий аналіз плоского механізму.....	35
4.1. Перетворення сил і моментів.....	35
4.2. Головний вектор і головний момент сил. Умови рівноваги тіла під дією до-вільної системи сил.....	39
4.3. Сили, що діють на механізм.....	42
4.4. Силовий аналіз плоского механізму.....	43
Контрольні запитання.....	50
Список літератури	51

Навчальне видання

МУЗИКІН Юрій Дмитрович
КЛІТНОЙ Володимир Вікторович
НАУМОВ Олександр Іванович

**ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО І СИЛОВОГО АНАЛІЗУ
МАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ**

Конспект лекцій з прикладної механіки
для студентів немашинобудівних спеціальностей

ЧАСТИНА І

Відповідальний за випуск А.В. Гайдамака

Роботу до видання рекомендував О.М. Шелковий

Редактор О.В. Козюк

План 2014 р., поз.186

Підп. до друку

Друк – ризографія. Гарнітура Times. Ум.-друк. арк.

Наклад 50 прим. Зам. №

Формат 60×84 1/16. Папір офсетний

Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ«ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ«ХП». 610002, Харків, вул. Фрунзе, 21